Funktionen Grundwissen Klasse 11 bis Abitur

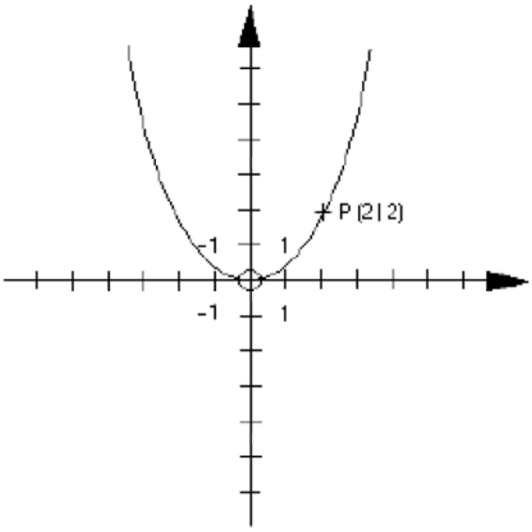
Tatsache 1

Punkt auf Graph f - Koordinaten erfüllen Funktionsgleichung

Wenn ein Punkt auf einem Graphen liegt, so müssen seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

Beispiel:

f(x) = 0,5 x²
P (2/2) → x = 2
f(x) = 0,5 * 4 = 2 → y = 2

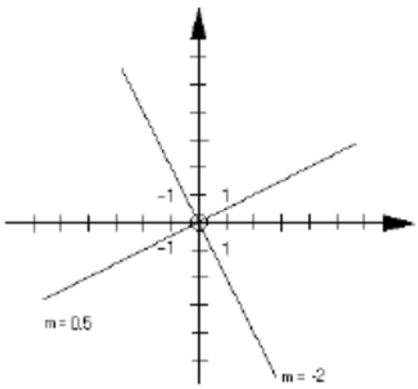


Tatsache 2

Geraden stehen senkrecht aufeinander: $m_1 * m_2 = -1$

Wenn zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen, so ergibt das Produkt ihrer Steigungen immer -1.

Beispiel:
f(x) = -2x
g(x) = 0,5 x
-2 * 0,5 = -1



Tatsache 3

Umkehrfunktionen:

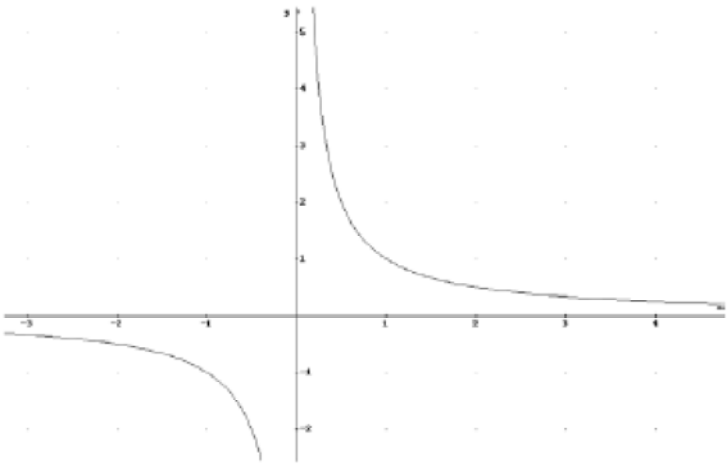
3.1 Definitions- und Wertebereich

Da bei der Bildung der Umkehrfunktion einer Funktion, durch die Spiegelung der Graphen an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten, die x- und y- Werte vertauscht werden, werden auch der Definitions- und Wertebereich vertauscht.
Folglich gilt:

ID (Definitionsmenge) der Funktion f = IW (Wertemenge) der Umkehrfunktion f^{-1}
IW (Wertemenge) der Funktion f = ID (Definitionsmenge) der Umkehrfunktion f^{-1}

3.2 Umkehrbarkeit einer Funktion

Eine Funktion ist dann umkehrbar, wenn sie in ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend ist (analog wenn f im gesamten ID streng monoton fallend ist)



Die Umkehrung dieses Satzes gilt allerdings nicht!!
So muss eine Funktion, die umkehrbar ist, noch lange nicht monoton sein.

Beispiel:

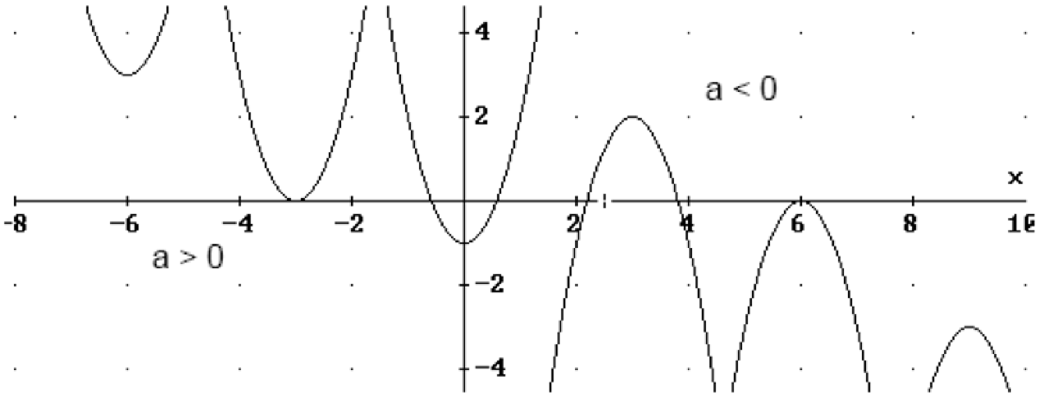
Die Funktion **f (x) =** $\frac{1}{x}$ ist zwar umkehrbar (**f^{-1} =** $\frac{1}{x}$) aber nicht streng monoton abnehmend
in IR \ {0} (Vgl. Tatsache 5)

Tatsache 4

Überblick über Graphen von Polynomfunktionen:

4.1 Parabeln
4.2 Funktionen dritten Grades
4.3 Funktionen vierten Grades

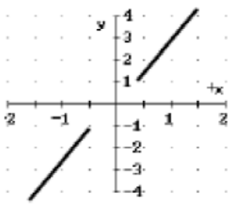
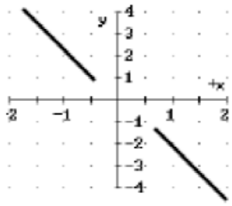
4.1 Parabeln $f(x) = ax^2 + bx + c$



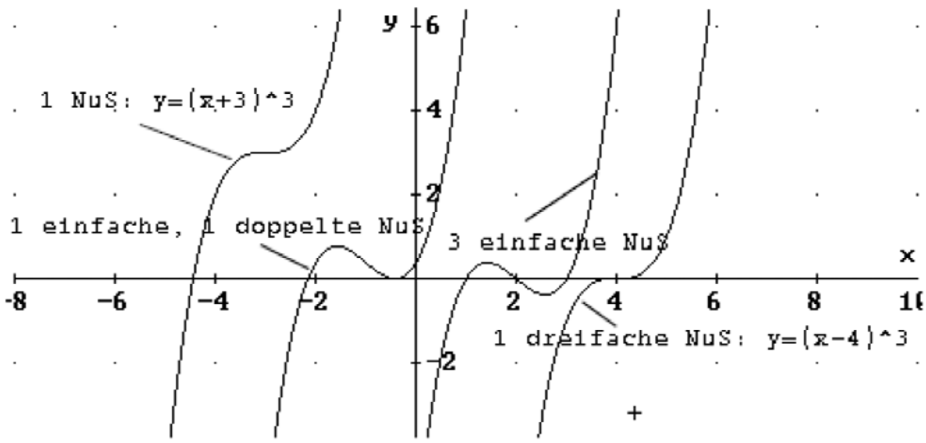
Durch Änderung von a wird die Parabel enger (IaI > 1) oder weiter (IaI <1)
das Vorzeichen bestimmt, ob die Parabel nach oben (a > 0) oder nach unten (a < O) geöffnet ist.

4.2 Funktionen dritten Grades $f(x)= ax^3 + bx^2 +cx + d$

Verhalten im Unendlichen:

 bei a > 0 und  bei a < 0

Unterschiede in Art und Anzahl der Nullstellen:

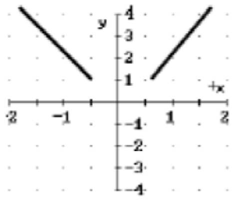


Graphen dritten Grades haben mindestens 1 und höchstens drei Nullstellen**.**

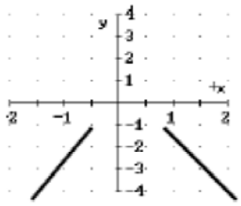
4.3 Funktionen vierten Grades $f(x) = ax^4 +bx^3 + cx^2 +dx + e$

Verhalten im Unendlichen:

Verhalten im Unendlichen

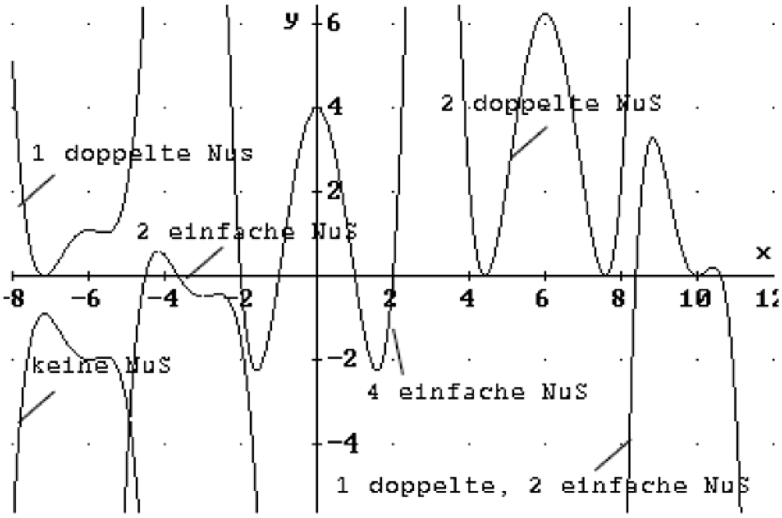


bei a > 0 und



bei a < 0

Unterschiede in Anzahl und Art der Nullstellen:



Das sind natürlich noch lange nicht alle Möglichkeiten.

Tipp: Experiment mit Derive

Graphen nach rechts/ links verschieben, indem man x durch (x + a) substituiert, nach oben/ unten indem man zum Funktionsterm a addiert.
Will man doppelte Nullstellen, so bestimmt man Maxima oder Minima und addiert, bzw. subtrahiert sie vom Funktionsterm.

Beispiel:

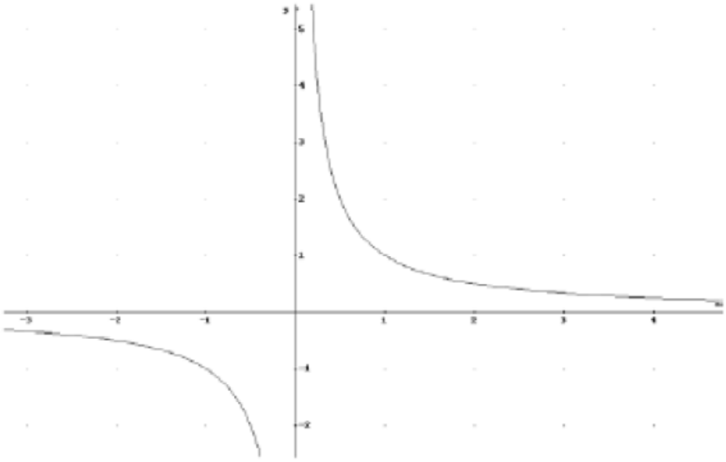
Diese Funktion hat genau 2 einfache Nullstellen:

$f(x) = x^4 - x = x * (x^3 - 1)$
Die erste Nullstelle ist x= 0.
Durch Ausprobieren finden wir als 2. Nullstelle x = 1.

Tatsache 5

Die Funktion f(x) = $\frac{1}{x}$ fällt (negative Steigung) nicht in IR \ {0}, also nicht in ganz ID

- beachtet man zunächst gesondert den Bereich IR^-, so ist die Funktion streng monoton abnehmend, da gilt:
  $x_2 \leftrightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$
- die streng monotone Abnahme der Funktion gilt auch im Bereich R^+, da auch hier gilt: **$x_2 \leftrightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$**
- betrachtet man die Funktion aber in IR \ {0} so ist sie nicht streng monoton abnehmend, da **$x_1 > x_2$** und **$f(x_1) > f(x_2)$** möglich ist.
  0,5 > -2   und 2> -0,5



Tatsache 6

Anzahl der Nullstellen eines Polynoms

Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Beweisidee:

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 4$ ist ein Polynom 4. Grades

Kennt man eine Nullstelle z.B. x = 1 so kann man mittels Polynomdivision den Funktionsterm durch (x - 1) teilen:

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 4 : (x - 1) = x^3 - x^2 + 2x + 4$

Das Ergebnis hat jetzt nur noch den Grad 3

Danach würde man für das Ergebnis der Polynomdivision weiter nach Nullstellen suchen und z.B. x = -1 finden.

Bei der nächsten Polynomdivision erniedrigt sich das Ergebnis wieder um einen Grad.

$x^3 - x^2 + 2x + 4 : (x + 1) = x^2 - 2x + 4$
Dieses Ergebnis hat jetzt noch höchstens 2 Nullstellen.

Da sich also für jede gefundene Nullstelle der Grad des Ergebnisses um eins erniedrigt, hat das Polynom höchstens so viele Nullstellen wie der Grad angibt.

Tatsache 7

Verhalten des Graphen beim Durchgang durch die Nullstelle

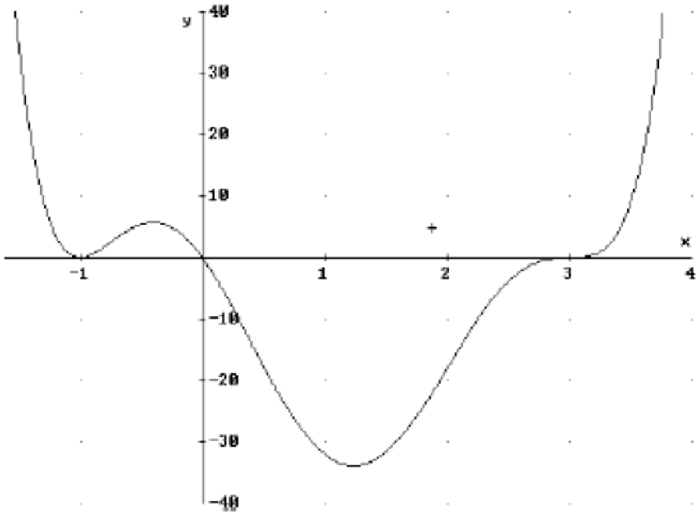
Beispiel:

$f(x) = x * (x + 1)^2 * (x - 3)^3$

einfache Nullstelle bei x =0
Vorzeichenwechsel des Graphen

doppelte Nullstelle bei x = -1
Graph berührt die x- Achse

dreifache Nullstelle bei x = 3
Graph schneidet wieder die x- Achse



Allgemein:

- wenn n gerade, Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel, d.h. der Graph berührt nur die x- Achse
- wenn n ungerade, Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, d.h. der Graph schneidet die x- Achse

Wann wechselt eine stetige Funktion das Vorzeichen?

- bei Nullstellen gerader Ordnung
- bei Polstellen ungerader Ordnung

Bei Nullstellen gerader Ordnung berührt der Graph die x- Achse nur.

Tatsache 8

Symmetrien bei den Graphen von Polynomfunktionen

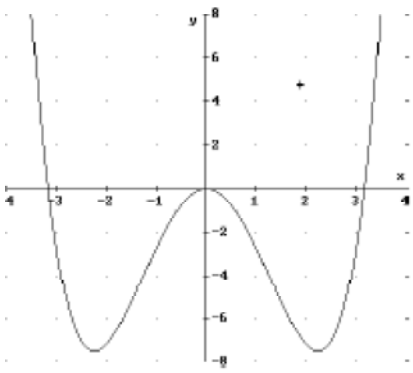
Der Funktionsterm enthält nur gerade Potenzen von x $\longrightarrow$
der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, für gerades n gilt also: $x^n = (-x^n)$

Bei diesen Funktionen ist **$f(-x) = f(x)$**

Beispiel:

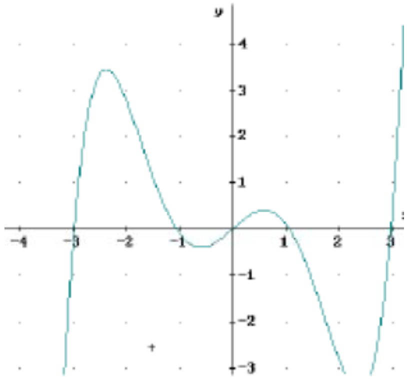
$f(x) = 0{,}3x^4 - 3x^2$
$f(-x) = 0{,}3(-x)^4 - 3(-x)^2 = 0{,}3x^4 - 3x^2 = f(x)$

Wenn f(x) = f(-x) muss der Graph achsensymmetrisch sein.



Der Funktionsterm enthält nur ungerade Potenzen von x $\longrightarrow$
Der Graph ist punktsymmetrisch.

Betrachtet man eine Funktion mit nur ungeraden Potenzen, so ist **f(-x) = - f(x)** d.h. ihr Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
Der Symmetriepunkt ist der Ursprung



Beispiel:

$f(x) = 0{,}1x^5 - x^3 + x$

Tatsache 9

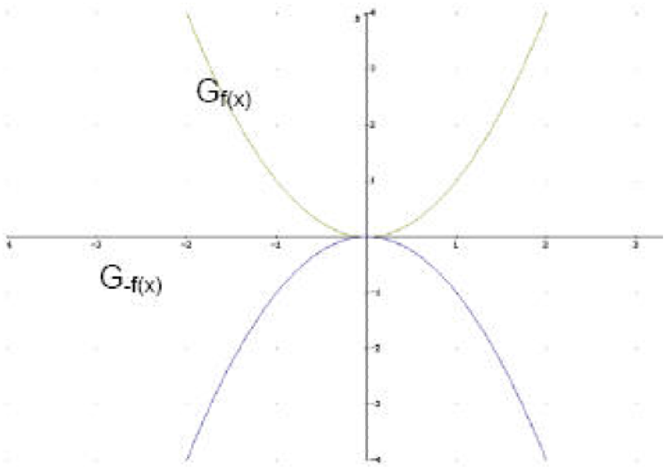
Veränderungen von Graphen f(-x), -f(x), f(x)+a, f(x+a)

-f(x)

Beispiel:

$f(x) = x^2$
$-f(x) = -x^2$

Wird der ganze Funktionsterm mit -1 multipliziert, dann wird der Graph an der x- Achse gespiegelt

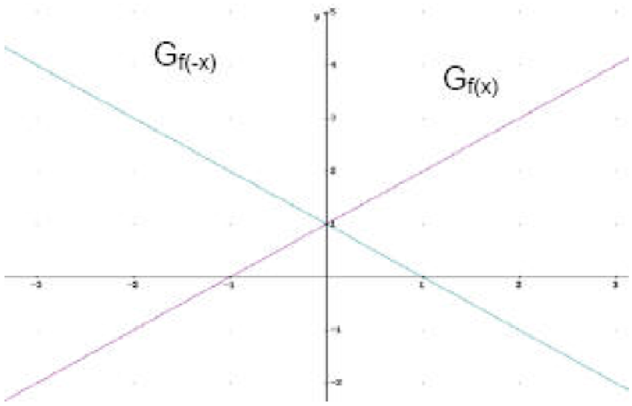


f(-x)

Beispiel:

$f(x) = x + 1$
$f(-x) = -x + 1$

Wird nur das x mit -1 multipliziert, dann wird der Graph an der y- Achse gespiegelt



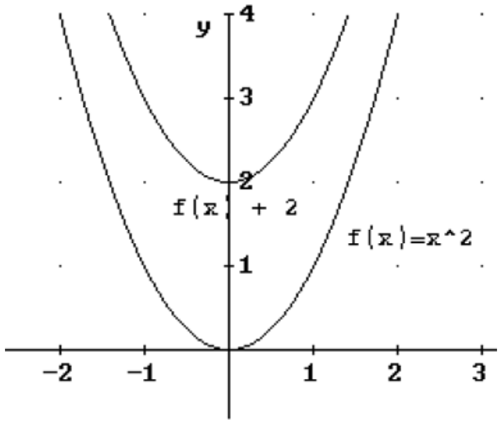
Deswegen auch Tatsache 8:
Wenn für den Funktionsterm gilt: f(-x) = f(x)
dann ist der Graph achsensymmetrisch zur y- Achse

f(x) + a

Besipiel:

f(x)   = x²
f(x) + a = x² + 2

Wird eine Konstante k zum Funktionsterm addiert, so wird der Graph um diese Konstante nach oben (k>0) oder nach unten (k<0) verschoben.

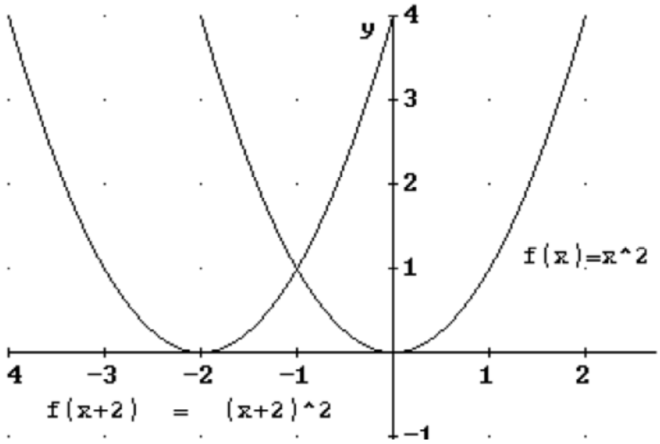


f(x+a)

Besipiel:

f(x)   = x²
f(x+a)   = (x+2)²

Wird die Konstante k nur zum x addiert, so wird der Graph nach rechts (k<0) oder nach links (k>0) verschoben.
Die Richtung der Verschiebung ist also gerade umgekehrt als das Vorzeichen von a. Man kann sich das gut an den Nullstellen der beiden Funktionen f(x) = (x+2)² und f(x) = (x-2)² merken.



Tatsache 10

Gebrochen rationale Funktionen

10.1 Definitionsbereich = IR \ {Nullstellen des Nenners}

10.2 Löcher des Graphen sind Gleichzeitig Nullstellen von Zähler und Nenner (hebbare Definitionslücken)

10.3 Nullstellen der Funktion = Nullstellen des Zählers der gekürzten Fassung, senkrechte Asymtoten haben die Gleichung x = (solch eine Z-Nullstelle)

10.4 Polstellen der Funktion = Nullstellen des Nenners der gekürzten Fassung

10.5 Waagrechte Asymptoten: Wenn Grad Z = Grad N, sonst schiefe asymptotische Geraden oder auch Kurven (letzteres, wenn Grad Z um 2 größer als Grad N)

Tatsache 11

Steigung von f in xo

Um die Steigung in einem Punkt P eines Funktionsgraphen zu ermitteln, bildet man zuerst die Sekante durch diesen Punkt P und einen Punkt Q.

Formel: $m_s = \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \frac{GK}{AK} = \frac{\text{Differenz der y-Werte}}{\text{Differenz der x-Werte}}$

Beispiel:

f(x) = x² im Punkt (1/1)

$$m_s = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h$$

Die Sekantensteigung beschreibt die durchschnittliche Steigung eines Abschnitts der Funktion zwischen zwei Punkten.

Nun geht man zur Tangente über, indem der Abstand der zwei Schnittpunkte der Sekante mit dem Graphen immer kleiner wird:

$$m_T = \lim_{h \to 0} m_s$$

⟶ Steigung in einem Punkt der Funktion

Der Grenzwert der Sekante ist n

- die Tangentensteigung ist n
- die Funktion hat für p die Steigung n
- f' (p) = n

Inzwischen kennen wir natürlich die Steigungsformel f'(x) für jeden x- Wert der Parabel: f' (x) = 2x Also müssen wir nur noch einen x- Wert in die Steigungsformel einsetzten um die Steigung zu ermitteln, z.B. f'(1) = 2 * 1 = 2

Das ist dann natürlich auch gleichzeitig der Steigungswert m der Tangente an die Parabel im Punkt (1/1)

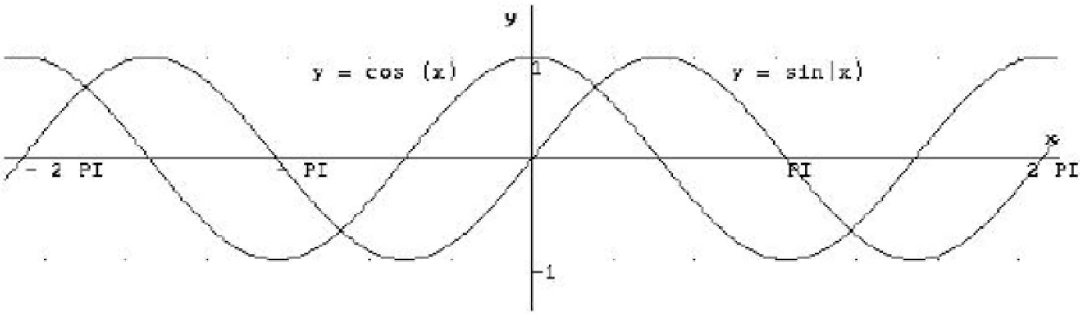
Allgemeine Definition:

$$m_T = \lim_{h \to 0} m_s = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Tatsache 12

Wichtige Ableitungsregeln: sin/ cos, Produkt und Kettenregel

12.1 Ableitung von sinus- und cosinus- Funktionen



Grund warum der sin (x) abgeleitet der cos (x) ist:

Betrachtet man den cos (x) stellt man fest, dass er bei $\pi/2$ einen Vorzeichenwechsel (VzW)
+ → - hat, was auf ein Maximum der Sinusfunktion schließen lässt.

Auch an der Stelle $3\pi/2$, wo ein VzW - → + der Cosinusfunktion stattfindet, besitzd die Funktion sin(x) einen Tiefpunkt.

Außerdem muss die Ableitung der Funktion sin(x) periodisch sein.
All diese Kriterien erfüllt der cos(x).

Analog dazu kann diese Betrachtung auch bei cos(x), -sin(x) und -cos(x) durchgeführt werden.

Funktion	Ableitung
sin(x)	→ cos(x)
cos(x)	→ - sin(x)

12.2 Produktregel

f(x) = u(x)`* v(x)
f'(x) = u(x) * v'(x) + v(x) * u'(x)

Was u oder v ist ist bei der Produktregel egal!

Beispiel:

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{x} * \underset{\substack{\uparrow \\ v}}{\sin(x)}$$

$f'(x) = 1 * \sin x + x * \cos x$

12.3 Quotientenregel

$f'(x) = \frac{v(x) * u'(x) - u(x) * v'(x)}{[v(x)]^2}$ in Worten: $f'(x) = \frac{NAZ - ZAN}{N^2}$

$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{x+1}{x} = \frac{x * 1 - (x+1) * 1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

12.4 Kettenregel

f(x) = v'(u(x)) * u'(x) in Worten: äußere Ableitung mal innere Ableitung

Das vergessene Nachdifferenzieren ist einer der beliebtesten Fehler!

Beispiel:

f(x) = (3x - 2)²

u(x) = 3x -2 = z
v(z) = z²
v(u(x)) = (3x - 2)²

f'(x) = 2 * z² * 3 = 2 * (3x -2) * 3 = 18x - 12

Tatsache 13

Monotoniekriterium: Bestimmung der Steigung mit Hilfe von f

Geg: f(x) = x^4

Ges: Monotonie, Steigung (f)

Lösung: Die Funktion $f: x \mapsto f(x); x \in M \subset D_f$ heißt

a)

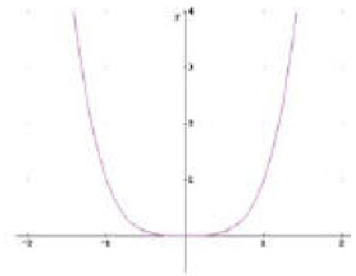
Monoton zunehmend in M,	Monoton abnehmend in M,
wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:	
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ $\Rightarrow f'(x) \geq 0$	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ $\Rightarrow f'(x) \leq 0$

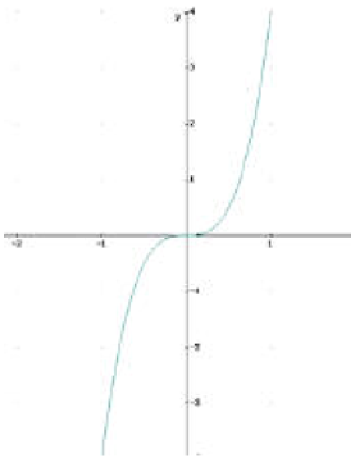
b)

streng/echt monoton zunehmend in M,	*streng/echt* monoton abnehmend in M,
wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:	
$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ $\Rightarrow f'(x) > 0$	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ $\Rightarrow f'(x) < 0$

Beispiel:

$f(x) = x^4$





$\Rightarrow$ Die Funktion $y=x^4$ ist im Intervall $]-\infty;0]$ fallend und im Intervall $[0;+\infty[$ monoton steigend,

da in diesem Intervall f'(x), also die Steigung immer größer bzw. kleiner 0 ist:

$$f'(x) = 4x^3$$
$$f'(x) > 0; x \in]0;\infty[$$
$$f'(x) < 0; x \in]-\infty;0[$$

Tatsache 14

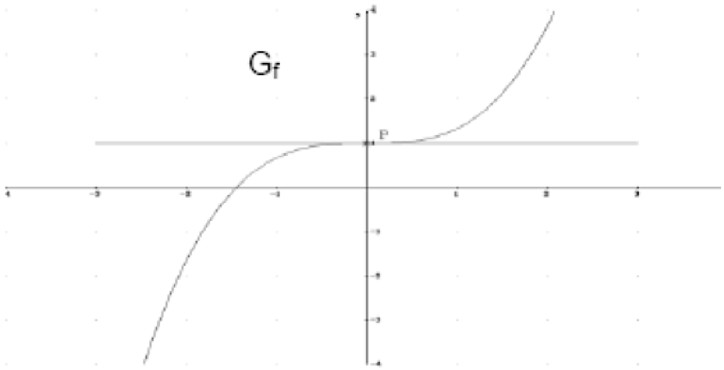
Extrempunkte und Sattelpunkte

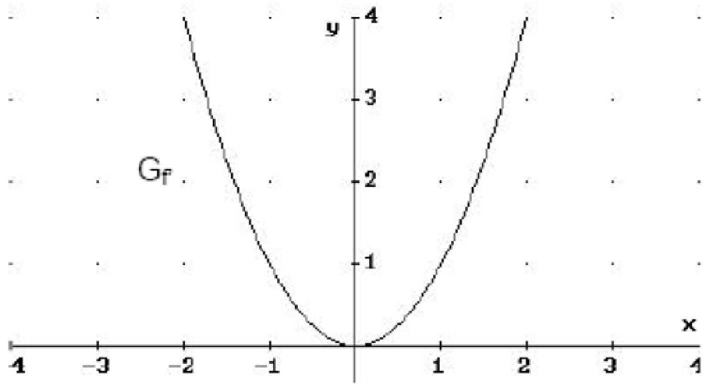
14.1 Waagrechte Tangenten

Wenn die erste Ableitung Null an einer Stelle ist, dann hat der Graph eine Waagrechte Tangente.
Ob weiterhin ein Extrempunkt oder ein Sattelpunkt vorliegt, muss erst untersucht werden.

Beispiel: f(x) = 0, aber kein Extrempunkt

Gegeben ist die Funktion: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$





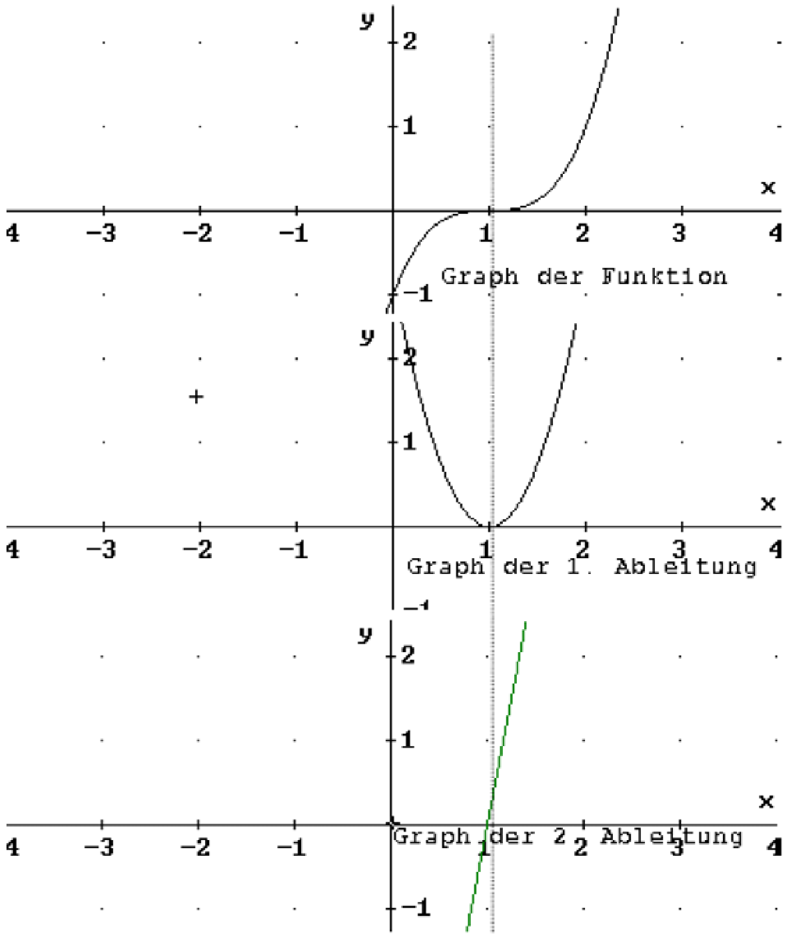
Wir bilden die erste Ableitung:
f'(x) = x². f' hat eine Nullstelle bei x = 0,
aber es liegt bei x= 0 kein Extrempunkt vor,
da die Funktion f' ihr Steigungsverhalten
nicht wechselt.
Es liegt ein sogenannter Sattelpunkt vor.

Da die Ableitung an einer Stelle Null ist, hat der Graph dort eine waagrechte Tangente, wie die Skizze verdeutlicht.

Berechnung der Tangente in P(0/1)
mt = f'(0) = 0
Tangente: y = 0 * x + t
t ist hier der y- Wert von P,
also y = 1

Sattelpunkt (SAP)/ Terrassenpunkt (TEP)

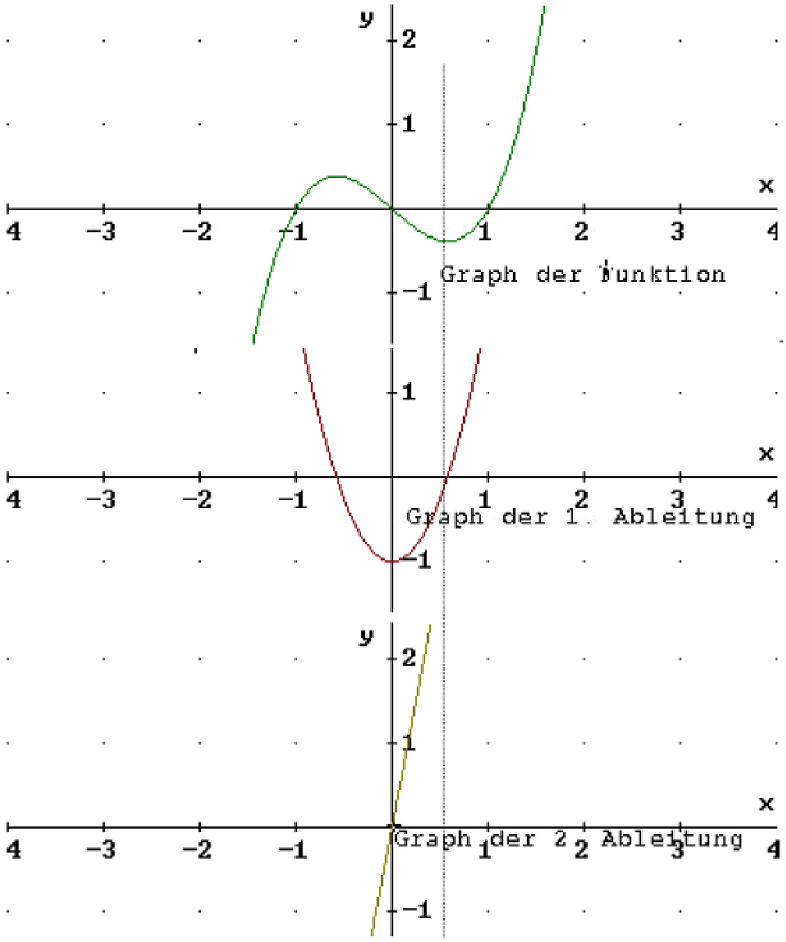
f ' hat eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel
f '' hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel



Hieraus folgt, dass Sattelpunkte auch automatisch Wendepunkte sind.

Minimum/ Maximum

f ' hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel
f '' hat keine Nullstelle



Maximum (Max) y- Wert des Hochpunktes
Minimum (min) y- Wert des Tiefpunktes

Beispiel:
$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2 (x - 3)$ Nullstellen: (0/0), (3/0)
$f'(x) = 0$
$f'(x) = 3x^2 - 6x$
$3x^2 - 6x = 0$
$f'(x) = x (3x - 6) = 0$ Punkt$_1$: $x_1 = 0$ Punkt$_2$: $x_2 = 2$
$y_2 = 0$ $y_2 = -4$

Graph von f hat bei x = 0 und y = 2 waagrechte Tangenten, aber noch kein Minimum gezeigt.

Nachweis für Minimum: Skizze von $G_{f'}$

f' hat bei x = 2 VzW + $\longrightarrow$ -
f hat bei x = 2 ein relatives Minimum.

Kriterium für ein Minimum:
Erst fällt f, dann steigt f
Erst f' < 0, dann f' > 0
Dazwischen wechselt die Ableitung das Vorzeichen erst - dann +.
Schreibweise: VzW - $\Rightarrow$ +
z.B.: f' hat bei x=2 VzW - $\Rightarrow$ +
=>f hat bei x = 2 Min

Kriterium für ein Maximum:
Erst steigt f, dann fällt f
Erst f'>0, dann f'<0
Dazwischen wechselt die Ableitung das Vorzeichen erst + dann -.
Schreibweise: VzW + $\Rightarrow$ -
z.B.: f' hat bei x=0 VzW + $\Rightarrow$ -
=>f hat bei x = 0 Max

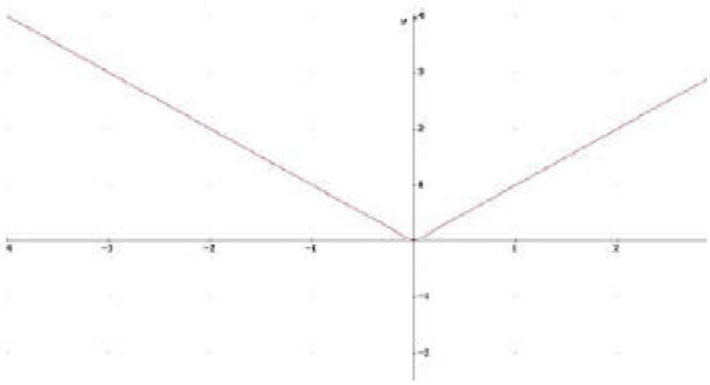
14.2 Extrempunkte ohne Ableitung

Es gibt auch Extrempunkte, ohne dass die erste Ableitung Null ist:
nämlich wenn G_f einen Knick hat und f' nicht existiert.

Beispiel:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$$



für x = 0 existiert keine Ableitung

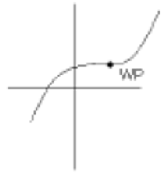
Wie könnte eine Argumentation für TIP aussehen?
$f(x) = |x| \geq 0$ Der kleinstmögliche Funktionswert ist als Null.
Bei x = 0 gilt f(x) = 0 die Funktion nimmt sogar ein absolutes Minimum an.

Tatsache 15

Wendepunkte

Der Übergang von Rechts- auf Linkskrümmung (beziehungsweise umgekehrt), heißt Wendepunkt (WEP). Wendepunkte liegen an den Extrempunkten von f' bzw. an den Nullstellen mit VzW von f''.

Fragen	Antworten
1 Vielfachheit der NuS x_o von f'	**1** Keine NuS/ kein VzW
2 Vielfachheit der NuS x_o von f''	**2** 1-fach VzW
3 Art der Kurvenpunkte $P(x_o/f(x_o))$	**3** WEP
4 Typischer Verlauf der Kurve bei P	**4**

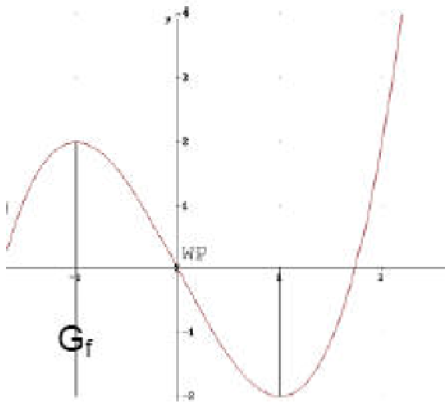


Tatsache 16

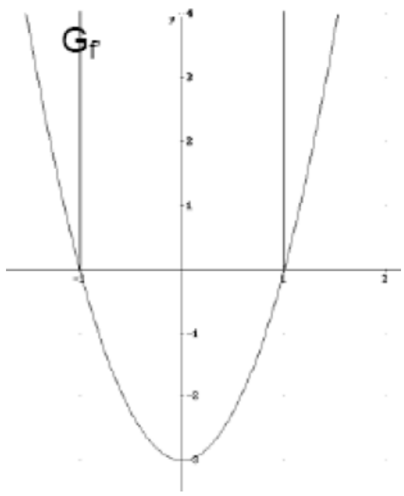
Krümmung

f' positiv → Graph linksgekrümmt
f' negativ → Graph rechtsgekrümmt

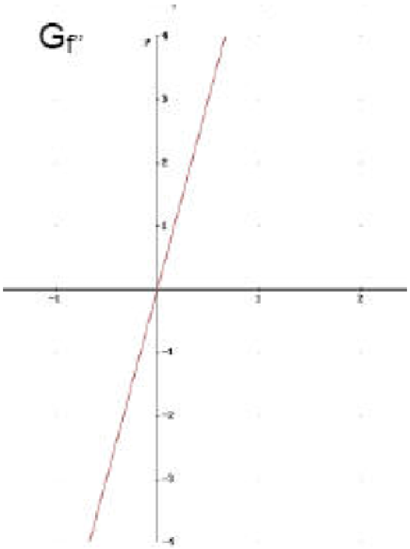
Beispiel:
Gegeben ist die Funktion: $f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$



1. Ableitung: $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$



2. Ableitung: $f''(x) = 6x$



x < 0: f''(x) < 0 → G_f rechtsgekrümmt
x = 0: f''(x) hat VzW → G_f hat Wendepunkt
x > 0: f''(x) > 0 → G_f linksgekrümmt

Tatsache 17

Welche Funktion steigt stetig?

Stetig sind im Bereich der Schulmathematik alle Funktionen, die sich durch eine einzige Funktionsgleichung darstellen lassen, auch Funktionen mit Beträgen.
(Stetigkeit bedeutet: Die Funktion kann durchgezeichnet werden, besitzt also keine Lücken.)

Die Stetigkeit von abschnittsweise definierten Funktionen an ihren Nahtstellen muss nachgeprüft werden.

Tatsache 18

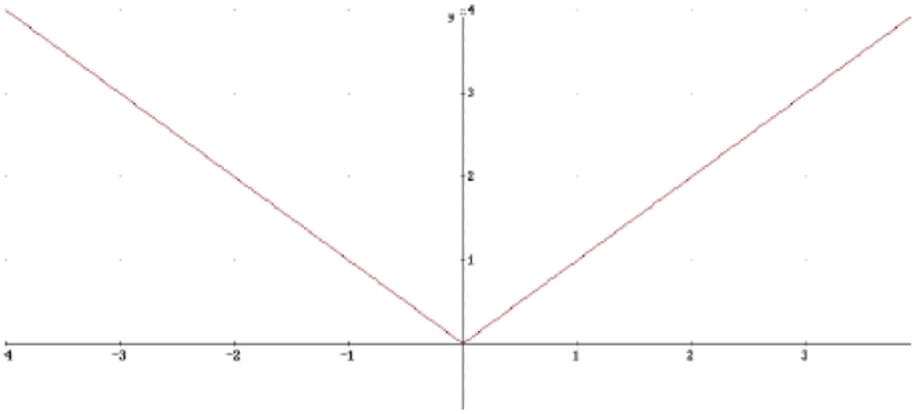
Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Ist eine Funktion differenzierbar an einer Stelle x_o, dann ist sie dort auch stetig (gewesen)
.
Wenn eine Funktion also stetig an einer Stelle x_o ist, dann kann sie differenzierbar sein oder nicht.

Beispiel:

f(x) = IxI
stetig in x = 0
(Graph hat keinen Sprung)

aber nicht differenzierbar in x = 0
(Graph hat einen Knick)

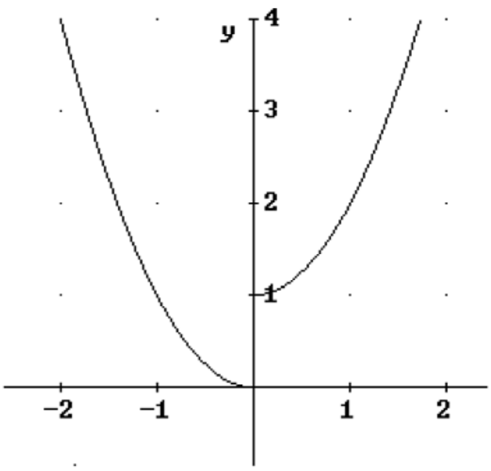


Tatsache 19

Sprünge und Knicke bei Graphen

18.1 Sprünge

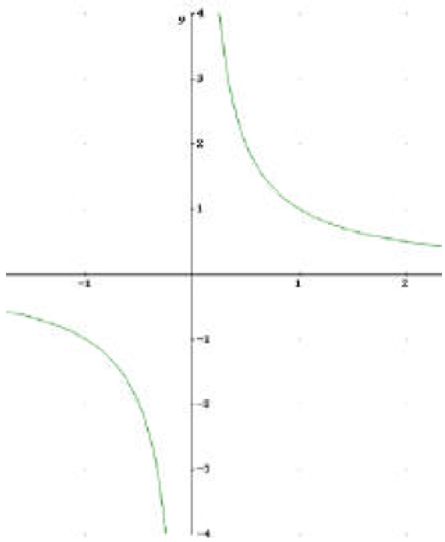
Ist f nicht stetig an einer Stelle im Definitionsbereich, so hat der Graph dort einen Sprung



$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{wenn } x \geq 0 \\ x^2, & \text{wenn } x<0 \end{cases}$$

Dies gilt nicht für Definitionslücken, z.B.

$f(x)= \frac{1}{x}$, $x= 0 \notin ID$



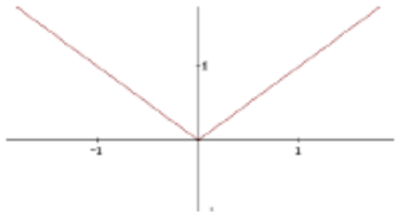
G_f springt bei x = 0
f nicht unstetig bei x = 0,
denn x = 0 existiert für f nicht!

f ist aber natürlich auch nicht stetig bei x = 0!

18.2 Knicke

ist f nicht differenzierbar an einer stelle aus IDf, an der f stetig ist, so hat der Graph dort einen Knick

Beispiel:
f (x) 0 IxI



Dies ist nicht anwendbar auf Stellen, an denen f noch nicht mal stetig ist. Denn hat der Graph einen Sprung, dann kann man gar nicht nach einem Knick fragen.