Kl. 12 Mathematik Klassenarbeit 1 27.10.03

Hinweis: Bearbeitung ohne Taschenrechner!

Aufgabe 1:

In einer geometrischen Folge $(a_n)_{n\in N}$ ist $a_3 = -\frac{4}{3}$ und $a_6 = \frac{3}{16}$.
Bestimmen Sie a_0.

Aufgabe 2:

Gegeben ist eine Folge durch $a_n = \frac{5n}{1+n}$.

a) Zeigen Sie, dass die Folge streng monoton wachsend ist.

b) Hat die Folge eine obere Schranke? Beweis!

Aufgabe 3:

Für eine Folge (a_n) ist $a_0 = -1$ und $a_{n+1} = 3 + \frac{1}{3}a_n$.

a) Veranschaulichen Sie die Folge grafisch.

b) Entnehmen Sie dem Schaubild, was kleinste obere Schranke ist.
Beweisen Sie, dass es sich um eine obere Schranke handelt!

c) Beweisen Sie, dass die Folge streng monoton wachsend ist.

d) Wie würden sich die oben besprochenen Eigenschaften ändern, wenn $a_0 = 8$ wäre und die Rekursionsformel beibehalten würde?

Aufgabe 4:

Beweisen Sie:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ für $n \epsilon N$

b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, für $n > 1$

* Zusatzaufgabe:

Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\frac{n(n-4)}{(n+1)(\sqrt{n}+100)}\right)$ nach oben nicht beschränkt ist.

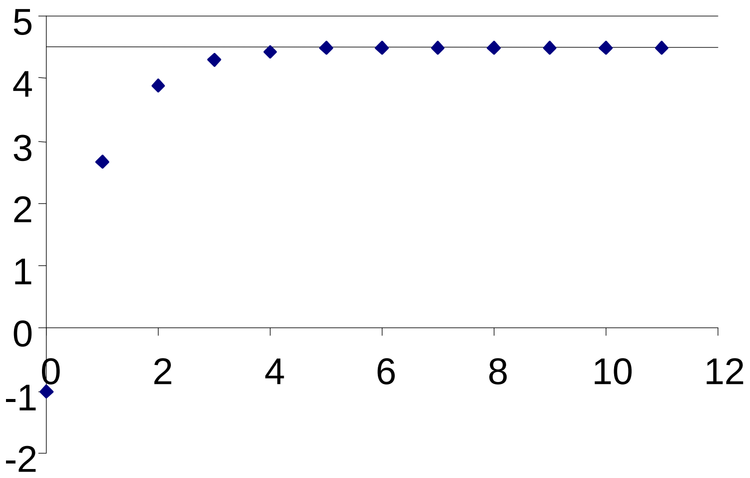
Kl. 12 Mathematik Klassenarbeit 1 27.10.03 Lösungen

1) $a_0=\dfrac{256}{27}$

2) a) $\forall n\in\mathbb{N}\ \dfrac{5n}{n+1}<\dfrac{5n+5}{n+2}\Rightarrow 0<5$ q.e.d.

b) $\forall n\in\mathbb{N}\ \dfrac{5n}{n+1}<5\Rightarrow 0<5$ q.e.d

3) a)



b) kleinste obere Schranke: 4,5

$\forall n\in\mathbb{N}\ a_n<4,5$

Induktionsanfang: $a_0<4,5$

$n\longrightarrow n+1$: $a_{n+1}=3+\frac{1}{3}a_n<3+\frac{1}{3}.4,5=4,5$

d) streng monoton fallend; $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n>4,5$

c) $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n>a_{n+1}$

Induktionsanfang: $a_1>a_0$ ($\dfrac{8}{3}>-1$)

$n\longrightarrow n+1$: $a_{n+1}=3+\frac{1}{3}a_n=a_n+\underbrace{(3-\frac{2}{3}a_n)}_{>0,\text{ weil } a_n<4,5}>a_n$

d) streng monoton fallend; $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n>4,5$

4) a) Induktionsanfang: $1.2=\dfrac{1}{3}.1.2.3$ ü

$n\longrightarrow n+1$: $1.2+2.3+3.4+\ldots+n.(n+1)+(n+1).(n+2)=\dfrac{1}{3}.n.(n+1).(n+2)+(n+1).(n+2)=$

$=(n+1).(n+2).[\dfrac{1}{3}.n+1]=\dfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

b) Induktionsanfang: $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$ ü

$n\longrightarrow n+1$: $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=\dfrac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}>\dfrac{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}$

Zusatz: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+4)}{(n+1)(\sqrt{n}+100)}=\infty$