Für jedes t > 0 ist eine Funktion **f** $_t$ gegeben durch

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2$$

a) Untersuche die Funktion **f** $_t$ auf Symmetrie.

b) Berechne die Schnittpunkte der Graphen der Funktion **f** $_t$ mit der **x** - Achse.

c) Untersuche den Graphen der Funktion **f** $_t$ auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte.

d) Auf welcher Kurve liegen die lokalen Maximumpunkte der Graphen aller Funktionen **f** $_t$?
Gib eine Gleichung dieser Ortskurve an.

e) Skizziere den Graphen der Funktion **f** $_2$ im Intervall $-5 \leq x \leq 5$.

f) Die Punkte **P**$_1$ $\left(t; \frac{5}{9}t^2\right)$, **P**$_2$ $\left(t\sqrt{6}; 0\right)$, **P**$_3$ $\left(-t\sqrt{6}; 0\right)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion.
Ermittle eine Gleichung dieser quadratischen Funktion.

g) Die Verbindungsgerade der beiden Maximum-Punkte des Graphem von **f** $_2$ schneidet die **y** - Achse im Punkt **S**.
Der Punkt **S** und die beiden Kurvenpunkte **P** $\left(x_p; f_2(x_p)\right)$ und **Q** $\left(-x_p; f_2(-x_p)\right)$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks **QPS**.
Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal? Gib den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks **QPS** an.

h) Der Graph von **f** $_t$, die Tangente an den Graphen im Wendepunkt im 1. Quadranten und die **x** - Achse begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt **A (t)**. Berechne **A (t)**.

a) Untersuche die Funktion **f_t** auf Symmetrie.

****

Die Symmetrie-Untersuchung prüft, ob in die Funktionskurve (Graph) eine Symmetrieachse parallel zur y - Achse eingezeichnet werden kann. Dann könnte praktisch der Kurvenverlauf links und rechts der Symmetrieachse exakt "aufeinandergelegt" werden.

Um die Symmetrie zu prüfen, werden für alle x - Werte die Vorzeichen gewechselt. Wenn dann die Funktionswerte (y - Werte) für die x - Werte sowohl mit positivem als auch negativem Vorzeichen gleich sind, ist die Funktion symmetrisch.

Bei geradem Exponenten (Potenz) von x erhält man sowohl für positive wie für negative x - Werte dasselbe (positive) Ergebnis. Das liegt daran, dass plus mal plus = plus ist und minus mal minus = plus ist. Das Quadrat eines x - Wertes hat demnach genaugenommen immer zwei Lösungen.

Beispiel

$$x \cdot x = x^2 \qquad -x \cdot -x = x^2$$

Das gilt wie gesagt für jede Potenz mit geradem Exponenten. Weil eine Funktionsgleichung formal ein Polynom darstellt, kann man auch sagen, wenn das Polynom gerade Exponenten (Potenzen) hat, dann ist die Funktion symmetrisch.

Die Funktion

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2$$

ergibt mit gewechseltem Vorzeichen

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}(-x)^4 + \frac{2}{3}t^2(-x)^2 \quad = \quad -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2$$

was wiederum genau $= f_t(x)$ ist. Also ist $f_t(x)$ achsensymmetrisch zur y - Achse.

Hinweis: Der Vorzeichenwechsel wird nur bei den **x** - Werten vorgenommen, nicht bei eventuellen anderen Variablen. In der vorliegenden Funktion gibt es eine weitere Variable **t**. Sie wird auch *Parameter* genannt ist Bestandteil des Koeffizienten (Beifaktor) für **x**.

b) Berechne die Schnittpunkte der Graphen der Funktion **f_t** mit der **x** - Achse.

****

Wenn die Funktionskurve (Graph) die x - Achse schneidet, dann ist der zugehörige y - Wert zwangsläufig = 0. Um also die Schnittpunkte mit den x - Achsen zu finden, muss man die Funktionsgleichung

$y = \mathrm{f}_t(x) = 0$ setzen und dafür nach Lösungen (x - Werten) suchen. Man nennt die Schnittpunkte mit der x - Achse Nullstellen der Funktion.

$$\mathrm{f}_t(0) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}\mathrm{t}^2 x^2$$

Um die Lösungen zu finden, wird die Gleichung in geeigneter Weise umgeformt, um sie für die Berechnung zu vereinfachen. Das ist nicht immer leicht und erfordert viel Übung. Am einfachsten lassen sich Gleichungen mit dem Exponenten 1 (lineare Gleichungen) und dem Exponenten 2 (quadratische Gleichungen) umformen. Dazu gehören in gewisser Weise auch die Gleichungen mit einem Exponenten, der ein Vielfaches von 2 ist, denn dann kann man ausklammern oder faktorisieren.

In der vorliegenden Gleichung ist x^2 in beiden x - Werte enthalten und kann daher als Faktor ausgeklammert werden.

$$\mathrm{f}_t(0) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}\mathrm{t}^2 x^2 \quad = \quad x^2\left(-\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}\mathrm{t}^2\right)$$

Die einfachsten Nullstellen sind die, wenn x selbst = 0 ist. Weil x^2 nach dem Ausklammern als Faktor steht würde die ganze Gleichung = 0 sein, wenn x = 0 ist. Denn etwas mit 0 multipliziert ergibt immer 0, egal wie groß der zweite Faktor (der Klammerausdruck) ist. Man spricht bei der Nullstelle x = 0 auch manchmal von trivialer Nullstelle, weil sie recht einfach zu finden ist.

Daher findet man als Lösung: x = 0. Wie bereits oben festgestellt, gibt es für ein x^2 zwei x - Lösungen, nämlich eine positive und eine negative. Auch wenn man sich schwer vorstellen kann, worin sich $+0\,;-0\,;0^2$ unterscheiden, so sind die beiden Lösungen doch völlig korrekt.

$$x_{1,2} = 0$$

Man spricht hier auch von einer Doppel-Nullstelle.

Damit sind noch nicht alle Lösungen für $y = \mathrm{f}_t(x) = 0$ gefunden, denn auch der Klammerausdruck stellt einen Faktor dar, der = 0 sein kann und dann die ganze Gleichung = 0 wäre. Also muss man sozusagen "Unterlösungen" finden für die Gleichung

$$\left(-\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}\mathrm{t}^2\right) = 0$$

Der Klammerausdruck stellt eine Summe dar. Eine Summe ergibt = 0, wenn die Summanden gleich groß sind, aber verschiedene Vorzeichen haben. In der vorliegenden Summe haben beide Summanden verschiedene Vorzeichen. Wenn also gilt

$\frac{1}{9}x^2 = \frac{2}{3}\mathrm{t}^2$ dann wird der Klammerausdruck = 0, denn die Summanden heben sich gegenseitig auf.

Also muss man für $\frac{1}{9}x^2 = \frac{2}{3}\mathrm{t}^2$ eine Lösung für x finden.

$$\frac{1}{9}x^2 = \frac{2}{3}t^2 \qquad \Big| \qquad : \frac{1}{9}$$

$$x^2 = \frac{9}{1} \cdot \frac{2}{3} t^2 = \frac{18}{3} t^2 = 6t^2$$

$$x = \sqrt{6t^2} = \sqrt{6} \cdot t$$

Weil auch hier wieder zwei Lösungen für x möglich sind, heißen die beiden Lösungen

$$x_3 = \sqrt{6}\,t$$

$$x_4 = -\sqrt{6}\,t$$

Die Schnittpunkte mit der x - Achse haben demnach folgende Koordinaten (x;y - Paare)

$$P_1\left(0;0\right)$$

$$P_2\left(\sqrt{6}\,t;0\right)$$

$$P_3\left(-\sqrt{6}\,t;0\right)$$

Natürlich müssen die y - Werte immer = 0 sein.

c) Untersuche den Graphen der Funktion **f_t** auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte.

****

Die hauptsächlichen Rechenoperationen bei der Differenzialrechnung dienen zur Ermittlung der Koordinaten (x ; y - Werte) ganz bestimmter Punkte der Funktionskurve. Zu diesen Punkten zählen v.a. die Nullstellen, die Extrempunkte und die Wendepunkte. Diese Punkte sind deshalb so interessant, weil man sich mit ihrer Kenntnis ein Bild über den Kurvenverlauf machen kann und sich so die ganze Funktion besser vorstellen kann.

Extrempunkte einer Funktion sind solche Punkte, wo der y - Wert am größten oder am kleinsten wird. Das heißt, dort geht die Funktionskurve im Koordiantensystem am weitesten (positiv) nach oben oder am weitesten (negativ) nach unten.

Für die Berechnung der Extrempunkte bedient man sich der Rechenmittel, die Isaac Newton (sprich: eisa-ak njuten) und Gottfried Leibniz entwickelt haben und die im Grunde auf einer Ermittlung einer Funktionsgleichung für eine Tangente an die Kurve beruhen. Über diese Rechnungen sollte man sich im besonderen informieren. Hier sei nur soviel gesagt:

Um einen Extrempunkt zu berechnen, muss man die 1. Ableitung der Funktion bilden. Die 1. Ableitung ist immer auch gleichbedeutend mit dem Anstieg der Tangente im Extrempunkt. Es wird also praktisch für die ursprüngliche Funktionsgleichung eine dazugehörige weitere Funktion gesucht. Um die Ableitung zu bilden, gibt es zwei hauptsächliche Verfahren. Das eine funktioniert mittels einer Grenzwert-Berechnung und kann ziemlich umfangreich sein. Das andere Verfahren ist die Anwendung von Ableitungsregeln, die in Formelsammlungen zu finden ist. Solche Ableitungsregeln kann man sich einprägen oder man kann sie bei Bedarf nachlesen.

Eine der häufigsten Ableitungen ist die von Potenzen bzw. Potenzfunktionen. Ihre allgemeine Form ist

$$\mathrm{f}'\left(x^n\right) = n \cdot x^{n-1}$$

Das heißt, der Exponent wird als Faktor vor den x - Wert gesetzt und der x - Wert erhält den neuen um 1 verminderten Exponenten.

Beispiele

$$\mathrm{f}'\left(x^2\right) = 2x$$
$$\mathrm{f}'\left(2x^3\right) = 6x^2$$

Die 1. Ableitung wird immer mit einem hochgestellten Beistrich gekennzeichnet, jede höhere Ableitung mit entsprechenden vielen Beistrichen.

Weil man von jeder Funktion eine Ableitung bilden kann, kann man zwangsläufig auch von einer Ableitung wieder eine Ableitung bilden. Für die Differenzialrechnung spielen die ersten 3 Ableitungen einer Funktion eine Rolle.

Für diese Funktionsgleichung lauten die ersten 3 Ableitungen

$$\mathrm{f}'(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}\mathrm{t}^2 x$$
$$\mathrm{f}''(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}\mathrm{t}^2$$
$$\mathrm{f}'''(x) = -\frac{8}{3}x$$

Bei der 2. Ableitung ist zu beachten, dass **t** ein Parameter ist. Der ganze Ausdruck $\frac{4}{3}\mathrm{t}^2$ wird deshalb wie eine konstante Zahl behandelt. Die Ableitung einer konstanten Zahl ist immer = 0. Daher fällt der ganze Ausdruck in der 3. Ableitung weg.

Mit Hilfe der Ableitungen können nun die Extrempunkte und Wendestellen ermittelt werden. Für einen lokalen Extrempunkt gilt, dass die 1. Ableitung = 0 ist. Also werden Lösungen für die Gleichung gesucht:

$$-\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}t^2 x = 0$$

Weil es für die Lösung einer kubischen Gleichung (mit Exponent 3) nur schwierige Rechenwege gibt, sollte die Gleichung vereinfacht werden. Das geschieht wieder durch Ausklammern.

$$x\left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}t^2\right) = 0$$

Nach den Gesetzen der Multiplikation, wonach das Produkt = 0 wird, wenn mindestens ein Faktor = 0 ist, erhält man die Lösung

$$x_1 = 0$$

An dieser Stelle auf der x - Achse liegt also ein Extrempunkt der Funktion. Setzt man diesen x - Wert in die Anfangsgleichung ein, erhält man für y ebenfalls 0. Man kommt hier zu dem Ergebnis, das mit der Nullstelle der Funktion identisch ist.

Normalerweise werden zunächst alle Extrempunkte ermittelt und dann geprüft, ob es sich um lokales Maximum (höchster Punkt) oder lokales Minimum (tiefster Punkt) handelt. Die Methode für diese Prüfung soll gleich hier besprochen werden. Man braucht dafür die 2. Ableitung. Es gilt allgemein

- Wenn die 2. Ableitung für den eingesetzten x - Wert (Extremwert) größer als 0 ist, dann handelt es sich um ein Minimum (Tiefpunkt).
- Wenn die 2. Ableitung für den eingesetzten x - Wert (Extremwert) kleiner als 0 ist, dann handelt es sich um ein Maximum (Hochpunkt).

Das Prüfen der Extremwerte mittels der 2. Ableitung bezeichnet man auch als *hinreichende Bedingung*.

Setzt man die Lösung $x_1 = 0$ in die 2. Ableitung ein, erhält man

$f''(0) = \frac{4}{3}t^2$ und das ist immer > (größer als) 0, weil nach der Voraussetzung t > 0 ist. Also handelt es sich um ein lokales Minimum E₁ $(0\,;\,0)$

Nun sollen weitere mögliche Extrempunkte ermittelt werden. Aus der Gleichung

$$x\left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}t^2\right) = 0$$

kann auch der Klammerausdruck = 0 sein. Dafür würde gelten

$$\frac{4}{9}x^2 = \frac{4}{3}t^2 \qquad | \; : \frac{4}{9}$$

$$x^2 = \frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3}t^2 = 3t^2$$

$$x_2 = \sqrt{3}\,t$$

$$x_3 = -\sqrt{3}\,t$$

Die beiden x - Werte für die Extrempunkte werden in die Anfangsgleichung eingesetzt.

$$f_t\left(\pm\sqrt{3}t\right) = -\frac{1}{9}\cdot 9t^4 + \frac{2}{3}t^2\cdot 3t^2 \ = \ t^4$$

Die Extrempunkte haben demnach die Koordinaten

E_2 $\left(\sqrt{3}t\ ;\ t^4\right)$

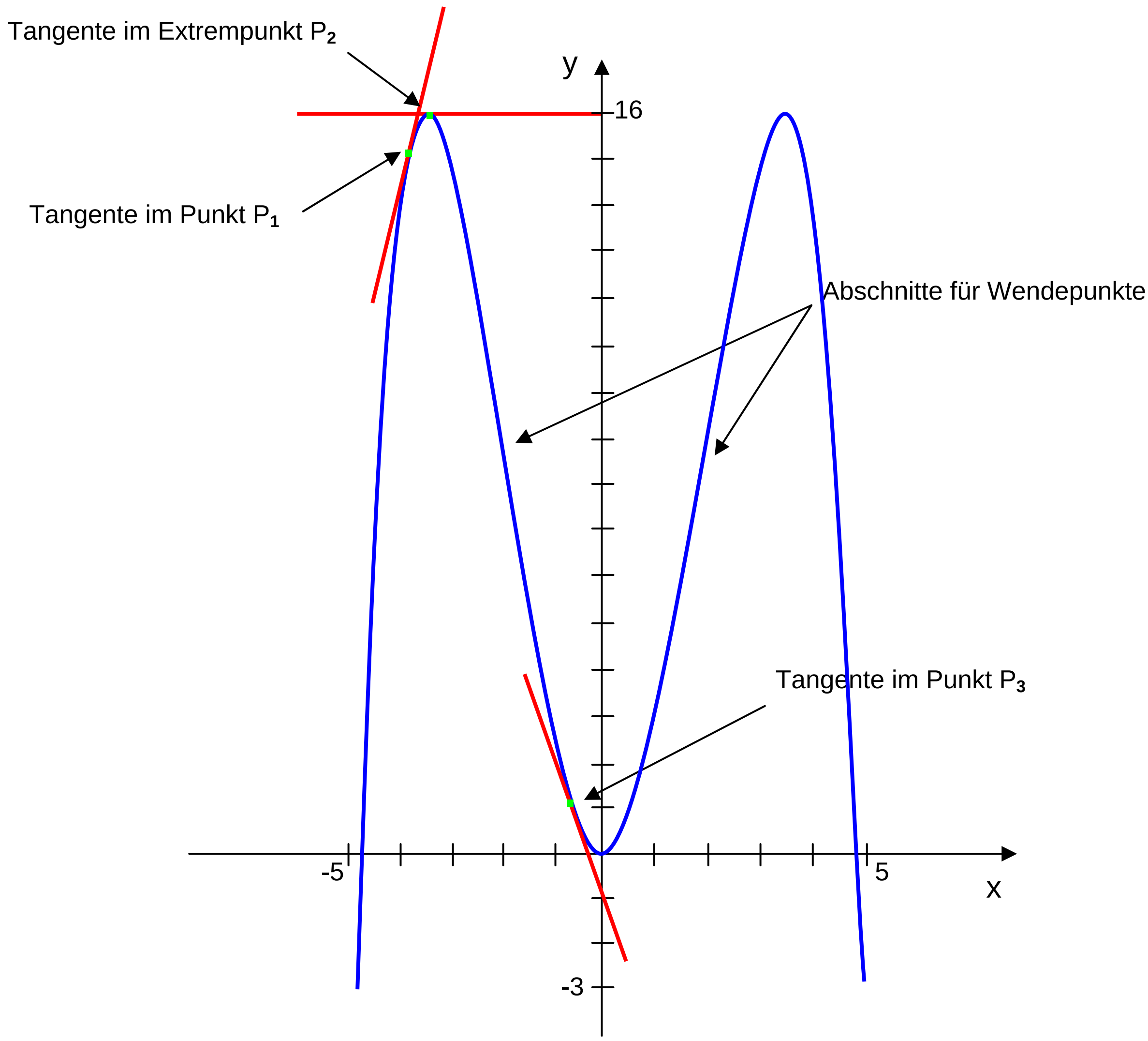
E_3 $\left(-\sqrt{3}t\ ;\ t^4\right)$

Auch für diese beiden Extrempunkte wird mittels der 2. Ableitung geprüft, ob es Hoch- oder Tiefpunkte sind.

$$f''\left(\pm\sqrt{3}t\right) = -\frac{4}{3}\cdot 3t^2 + \frac{4}{3}t^2 \ = \frac{8}{3}t^2 < 0$$

Es handelt sich in beiden Fällen um lokale Maxima (Hochpunkte).

Nun soll die Funktion auf Wendepunkte untersucht werden. Um zu verstehen, was ein Wendepunkt ist, kann man sich die Skizze des Funktions-Graphen ansehen, die hier schon vor der Teilaufgabe **e)** gezeigt werden soll.



Man kann sich vorstellen, dass die Tangenten von links beginnend an der Funktionskurve entlang gleiten und jede Tangente sozusagen durch genau einen Berührungspunkt mit der Kurve hindurch geht.

Wenn die Tangente z.B. vom Punkt P_1 aus an der Kurve entlang gleitet durch den Punkte P_2 bis zum Punkt P_3, dann ändert sich dazwischen ihr Drehsinn. Während der Gleitbewegung von Punkt P_1 durch den Hochpunkt P_2 hindurch hat die Tangente einen Drehsinn in Uhrzeiger-Richtung. Das heißt, in jedem Punkt der Kurve dreht sich die Tangente ein winziges Stückchen in Uhrzeiger-Richtung. Das geht einher mit der stetigen Änderung des Anstiegs dieser Tangente.

Im Punkt P_3 dreht sich die Tangente aber offensichtlich in entgegengesetzter Uhrzeiger-Richtung. Das wird beim Durchlaufen des Tiefpunktes der Kurve besonders deutlich.

Demnach muss es zwischen P_1 und P_3 logischerweise irgendwo einen Punkt geben, wo der Drehsinn wechselt. Dieser Punkt ist der Wendepunkt der Funktion. (Der dazugehörige x - Wert auf der x - Achse heißt Wendestelle.)

Die rechnerische Ermittlung des Wendepunktes ergibt sich aus folgender Überlegung. Wie bereits festgestellt, entspricht die 1. Ableitung dem Anstieg dem Anstieg der Tangente in einem Punkt der Funktionskurve. Diese 1. Ableitung stellt ihrerseits wiederum eine Funktion dar. Diese Funktion ist das oben beschriebene Entlanggleiten der Tangente an der Kurve. Was geschieht nun, wenn man diese Funktion (also die 1. Ableitung) wiederum als Anfangsfunktion betrachtet und davon die Ableitung bildet? Bezüglich der Ursprungsfunktion wäre das die 2. Ableitung, bezüglich der 1. Ableitung wäre das die 1. Ableitung der 1. Ableitung.

Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist, dass die 2. Ableitung der ursprünglichen Funktion = 0 ist. Demnach muss man Lösungen für folgende Gleichung finden

$$-\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}t^2=0$$

$$-\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}t^2=0 \qquad \Big| \quad +\frac{4}{3}x^2$$

$$\frac{4}{3}t^2=\frac{4}{3}x^2 \quad \Rightarrow \quad t^2=x^2$$

$$x_{W1}=t$$

$$x_{W2}=-t$$

Auch für Wendepunkte gibt es eine hinreichende Bedingung, die 3. Ableitung muss ungleich 0 sein.

$f'''(x)\neq 0$ Daraus ergibt sich

$f'''(\pm t)=\pm\frac{8}{3}t \neq 0$ weil nach Voraussetzung $t > 0$ ist.

Setzt man nun die gefundenen x - Werte für die Wendepunkte in die Anfangsgleichung ein, erhält man die vollständigen Koordinaten.

$$W_1\left(t;\frac{5}{9}t^4\right)$$

$$W_2\left(-t;\frac{5}{9}t^4\right)$$

Es bestehen also folgende Zusammenhänge:

- Die 2. Ableitung einer Anfangsfunktion ist die 1. Ableitung der 1. Ableitung dieser Anfangsfunktion.
- Die 1. Ableitung einer Funktion entspricht dem Anstieg der Tangente in einem Kurvenpunkt. Wenn die Ableitung = 0 ist, dann ist der Anstieg = 0 und die Tangente liegt parallel zur x - Achse.
- Für einen Extrempunkt gilt, dass die 1. Ableitung = 0 sein muss.
- Für einen Wendepunkt gilt, dass die 2. Ableitung = 0 sein muss. Da die 2. Ableitung aber wie gesagt auch eine 1. Ableitung darstellt, muss der Wendepunkt auch eine Art Extrempunkt sein. Man sagt deshalb, dass der Wendepunkt ein relativer Extrempunkt der 1. Ableitung (als Funktion) ist. Würde man die 1. Ableitung der Anfangsfunktion als Kurve zeichnen, dann könnte man an diese Kurve auch Tangenten anlegen, wie an jede andere Funktionskurve, denn man sieht einer einzelnen Funktion nicht an, ob es eine Ableitung ist. Diese Funktionskurve hätte genau in dem Punkt mit den Koordinaten des Wendepunktes der Anfangsfunktion einen lokalen Extrempunkt, dort wäre der Tangentenanstieg = 0.

d) Auf welcher Kurve liegen die lokalen Maximumpunkte der Graphen aller Funktionen $\mathbf{f_t}$?
Gib eine Gleichung dieser Ortskurve an.

****

Alle Funktionen $\mathbf{f_t}$ ergeben sich durch alle möglichen Werte, die der Parameter **t** annehmen kann. Und das sind im Grunde unendlich viele, denn die Voraussetzung verlangt nur, dass **t** > 0 sein muss. Demnach kann in der Anfangsgleichung

$$\mathrm{f_t}(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}\mathrm{t}^2 x^2$$

der Parameter **t** jeden einzelnen dieser Werte annehmen. Die Frage, die hier gestellt wird, ist: Wo liegen im Koordinaten-System die jeweiligen Maximumpunkte (Hochpunkte) für alle verschiedenen Werte von **t** ? Würde man **t** alle möglichen Werte durchlaufen lassen (was z.B. ein Computer-Rechner machen kann), dann müsste man aus jeder dieser Funktionskurven nur die Maximumpunkte notieren. Weil t in die Funktion eingebunden ist und diese Funktion für jeden Wert von t gesetzmäßig verläuft, ist natürlich auch die Menge aller dieser Maximumpunkte gesetzmäßig verteilt.

Die möglichen Maximumpunkte (in Abhängigkeit von **t**) stellen also ihrerseits eine Funktion dar, für die es selbstverständlich auch eine Kurve (Graphen) gibt.

Nach dieser Funktionskurve ist gefragt. Die Bezeichnung "Ortskurve" ist ein ziemlich altmodischer Ausdruck, der sich wahrscheinlich von dem lateinischen Wort für Ort = locus ableitet. (Weswegen man auch von einem lokalen Extrempunkt spricht). Damit sind die Orte gemeint, die ebenjene Maximumpunkte im Koordinaten-System haben. Praktisch sind diese Orte Punkte, die jeweils durch ein x - y - Wertepaar bestimmt sind. Eine Ortskurve ist also (eigentlich wie jede andere Kurve) eine Menge von Punkten auf einer Linie.

Um nun die Gleichung dieser Ortskurve der Maximumpunkte zu finden, muss man die allgemeine Gleichung für die Maximumpunkte suchen. Bei der Ermittlung der Extrempunkte wurden gefunden

E_2 $\left(\sqrt{3}\mathrm{t}\,;\ \mathrm{t}^4\right)$

E_3 $\left(-\sqrt{3}\mathrm{t}\,;\ \mathrm{t}^4\right)$

(Der Extrempunkt E_1 interessiert hier nicht, weil er keine Abhängigkeit zu **t** hat.)

Ganz egal, welchen Wert **t** annimmt, der x - Wert ist immer entweder $\sqrt{3}\mathrm{t}$ oder $-\sqrt{3}\mathrm{t}$. Das heißt, dass der Absolutbetrag von x = $\sqrt{3}\mathrm{t}$ ist.

$|x| = \sqrt{3}\,\mathrm{t}$ Das kann nach **t** umgestellt werden.

$\mathrm{t} = \frac{|x|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mathrm{t}^2 = \frac{x^2}{3}$ Das kann wiederum in die Anfangsgleichung eingesetzt werden.

$$\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3}\cdot x^2 = \frac{1}{9}x^4$$

$y = \frac{1}{9}x^4$ So lautet die Funktionsgleichung für die Ortskurve aller Maximumpunkte.

e) Skizziere den Graphen der Funktion **f** $_2$ im Intervall $-5 \leq x \leq 5$.

****

Um den Graphen einer Funktion zu zeichnen, kann man ausgewählte Punkte der Funktion berechnen und im Koordinatensystem eintragen. Wenn dieses Punkte verbunden werden, ergibt sich der Graph der Funktion. Er wird um so genauer, je mehr Punkte berechnet werden. Zu diesen Punkten gehören in jedem Fall die ermittelten Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte. Die Verbindung dieser Punkte gibt meistens schon eine recht gute Skizze der Funktion. Bei nicht-linearen Funktionen sollte man beachten, dass die Punkte niemals durch eine Gerade verbunden sind, sondern immer durch eine gekrümmte Linie, auch wenn die Krümmung in kleinen Kurvenabschnitten nicht mehr erkennbar ist.

Der Graph wird in ein Koordinatensystem mit x - und y - Achse eingezeichnet. Diese Achsen heißen auch Abzisse (x - Achse) und Ordinate (y - Achse). Manchmal spricht man auch von Kartesischen Koordinatensystem, weil es auf die Überlegungen von Rene Descartes (sprich: reneh dekahrt) zurückgeht, obwohl der es so nie verwendet hat. Das Kartesische Koordinatensystem ist eines der wichtigsten Hilfsmittel der Mathematik.

Wichtig für das Koordinatensystem ist die geeignete Maßeinteilung der Achsen. Die Einteilung muss nicht bei beiden Achsen gleich sein. Aber jede Achse muss eine eigene gleichmäßige Einteilung in Einheiten haben.

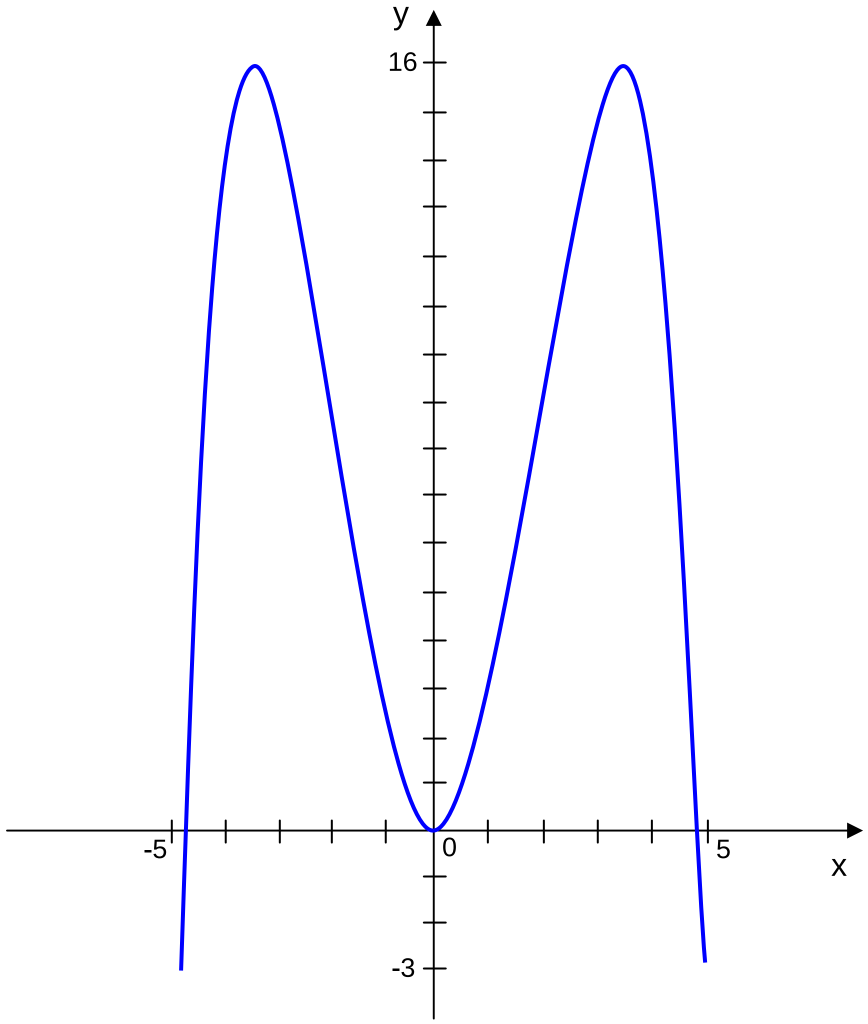
Bevor Punkte in das Koordinatensystem gezeichnet werden, müssen ihre Koordinaten (x - y - Wertepaar) ermittelt werden. Das geschieht durch eine Wertetabelle. Auf "Alexanders Mathematik Seite" steht eine Excel Datei zur Verfügung, wo Wertetabellen automatisch errechnet werden, wenn die richtige Formel für die Funktionsgleichung eingegeben wurde. Datei: Wertetabelle

Wertetabelle für die Funktion $\mathrm{f}_2(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}\mathrm{t}^2 x^2$ | **t** = 2

x	**y**
-5,0000	-2,7778
-4,5000	8,4375
-4,0000	14,2222
-3,5000	15,9931
-3,0000	15,0000
-2,5000	12,3264
-2,0000	8,8889
-1,5000	5,4375
-1,0000	2,5556
-0,5000	0,6597
0,0000	0,0000
0,5000	0,6597
1,0000	2,5556
1,5000	5,4375
2,0000	8,8889
2,5000	12,3264
3,0000	15,0000
3,5000	15,9931
4,0000	14,2222
4,5000	8,4375
5,0000	-2,7778

Die x - Achse sollte demnach in negative und positive Richtung mindestens 5 Einheiten haben, die y - Achse in positive Richtung (nach oben) bis mindestens 16 gehen, in negative (nach unten) bis -3.

Skizze des Graphen der Funktion



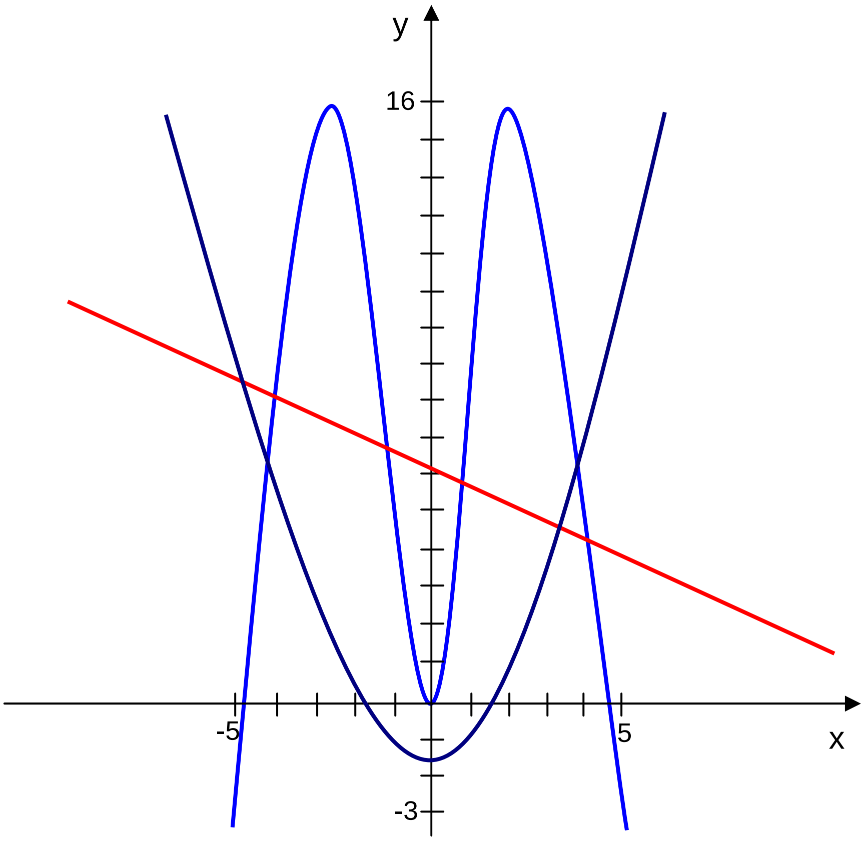
f) Die Punkte **P₁** $\left(t; \frac{5}{9}t^2\right)$, **P₂** $\left(t\sqrt{6};0\right)$, **P₃** $\left(-t\sqrt{6};0\right)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion.

Ermittle eine Gleichung dieser quadratischen Funktion.

****

Die angegebenen Punkte sind Punkte einer anderen Funktion, die mit der Anfangsfunktion $f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$ ebendiese Punkte gemeinsam hat. Dass zwei verschiedene Funktionen gemeinsame Punkte haben, ist nicht ungewöhnlich. Man braucht bloß durch die Funktionskurve eine Gerade zu ziehen, so dass gemeinsame Schnittpunkte entstehen. Jede dieser möglichen Geraden stellt eine eigene Funktion dar. Ebenso ist es (erst recht bei symmetrischen Funktionen höheren Grades) möglich, eine Parabel, also die Kurve einer quadratischen Funktion, einzuzeichnen.

Skizze für Funktionen mit gemeinsamen Punkten (enstpricht nicht der Lösung der Teilaufgabe)



Aus der Aufgabe geht hervor, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt, also ist die Kurve eine Parabel. Tatsächlich erkennt man aus den Koordinaten der Punkte P_2 $\left(t\sqrt{6};0\right)$ und P_3 $\left(-t\sqrt{6};0\right)$ dass diese Parabel ebenfalls symmetrisch zur y - Achse sein muss. Allerdings handelt es sich, wie man bei der Ermittlung der Gleichung herausfindet, um eine nach unten geöffnete Parabel (negativer Anstieg).

Weil es sich um eine quadratische Gleichung handelt, gilt folgende Allgemeine Form (Diese Gleichung kann man wie alle hier benutzten Formeln aus einem Tafelwerk oder einer Formelsammlung entnehmen)

$$y = \mathrm{f}(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$$

a und b sind Koeffizienten von *x*, c heißt absolutes Glied. Natürlich können sich durch entsprechende Vorzeichen auch Differenzen ergeben.

Zunächst setzt man die Koordinaten der drei gegebenen Punkte in diese allgemeine Form ein.

$$1)\qquad \frac{5}{9}t^2 = a\,t^2 + b\,t + c$$

$$2)\qquad 0 = a\cdot 6t^2 + b\cdot\sqrt{6}\,t + c$$

$$3)\qquad 0 = a\cdot 6t^2 - b\cdot\sqrt{6}\,t + c$$

Es kommt nun darauf an, **a** und **b** und **c** zu ermitteln. Schaut man sich die Gleichungen 2) und 3) an, dann erkennt man früher oder später, dass b nur = 0 sein kann, denn offenbar ist $-\mathrm{b} = +\mathrm{b}$ und das trifft nur auf b = 0 zu. Dies ist aber keine rechnerische Lösung und wird deshalb streng mathematisch nicht akzeptiert.

Die Gleichungen 1), 2), 3) stellen ein Gleichungssystem dar. Hier müssen also die Rechenregeln angewendet werden, die zum Lösen von Gleichungssystemen bekannt sind. Das sind im wesentlichen folgende drei Methoden

- Additionsmethode
- Gleichsetzungsmethode
- Einsetzungsmethode

Meistens werden alle drei Methoden gemischt angewendet. Der Haupttrick der Additionsmethode besteht darin, dass man eine Gleichung mit einer geeigneten Zahl multiplizieren muss und das Ergebnis (Produkt bzw. Vielfaches der Gleichung) dann zu einer anderen Gleichung addiert. Bei dieser Addition muss mindestens eine unbekannte Größe wegfallen (eliminiert werden). Wendet man diese Schritte mehrfach an, bleibt zum Schluss nur noch eine Gleichung mit einer unbekannten Größe übrig, die sich natürlich leicht ermitteln lässt.

Man versucht also zunächst, das absolute Glied **c** zu beseitigen. Würde man die Gleichungen 1) und 2) addieren, dann erhält man 2c. Würde man aber $+\mathrm{c} + -\mathrm{c}$ rechnen, dann hebt sich c auf und fällt aus der Gleichung weg. Wie bekommt man aber $-\mathrm{c}$? Durch eine eigentlich einfache Rechnung: Man multipliziert die Gleichung 2) mit -1 Das bedeutet praktisch, dass alle Vorzeichen der Gleichung gewechselt werden. Das ändert nichts am Ergebnis der Gleichung. Die Multiplikation mit -1 wird häufig bei solchen Gleichungssystemen angewendet und man sollte immer zuerst prüfen, ob sie sinnvoll ist. Dann kann man die Gleichungen 1) und 2) addieren. Glieder mit demselben Absolutbetrag fallen dabei weg.

$$\frac{5}{9}t^2 = a\,t^2 + b\,t + c$$

$$0 = a\cdot 6t^2 + b\cdot\sqrt{6}\,t + c \qquad | \qquad \cdot(-1)$$

$$0 = -a\cdot 6t^2 - b\cdot\sqrt{6}\,t - c$$

$$\left(\frac{5}{9}t^2 = a\,t^2 + b\,t + c\right) + \left(0 = -a\cdot 6t^2 - b\cdot\sqrt{6}\,t - c\right) =$$

$$\frac{5}{9}t^2 = -5a\,t^2 + b\,t - b\,t\cdot\sqrt{6}$$

$$\frac{5}{9}t^2 = -5a\,t^2 + b\,t\left(1-\sqrt{6}\right)$$

hier wurde $\mathrm{b\,t}$ ausgeklammert

Was man mit Gleichung 1) und 2) gemacht hat, kann man auch mit Gleichung 1) und 3) machen. Damit erhält man drei Gleichungen, von denen zwei bereits kein absolutes Glied **c** mehr haben.

$$\text{1a)} \qquad \frac{5}{9}t^2 = at^2 + bt + c$$

$$\text{2a)} \qquad \frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt\left(1-\sqrt{6}\right)$$

$$\text{3a)} \qquad \frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt\left(1+\sqrt{6}\right)$$

Auch hier sieht man wieder, dass b = 0 sein muss, denn t ist nach Voraussetzung > 0 und die Klammerausdrücke in den Gleichungen 2) und 3) sind verschieden, die Ergebnisse auf den linken Seiten der Gleichungen sind aber gleich.

Nun multipliziert man die Gleichung 2) mit -1 und addiert sie zur Gleichung 3) hinzu.

$$\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt\left(1-\sqrt{6}\right) \qquad | \qquad \cdot(-1)$$

$$-\frac{5}{9}t^2 = 5at^2 - bt\left(1-\sqrt{6}\right)$$

Zu beachten ist, dass sich im Klammerausdruck das Vorzeichen nicht ändert, weil der Klammerausdruck nur ein Teil des Summanden ist.

$$\left(\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt\left(1+\sqrt{6}\right)\right) + \left(-\frac{5}{9}t^2 = 5at^2 - bt\left(1-\sqrt{6}\right)\right) =$$

$$0 = bt\left(1+\sqrt{6}\right) - bt\left(1-\sqrt{6}\right) \quad =$$

$$0 = bt + bt\cdot\sqrt{6} - bt + bt\cdot\sqrt{6} =$$

$$0 = 2bt\cdot\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

Wenn nun streng mathematisch gezeigt wurde, dass b = 0 ist, dann ergibt sich aus Gleichung 2a)

$$\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{9}$$

Aus Gleichung 1a) folgt

$$\frac{5}{9}t^2 = -\frac{1}{9}t^2 + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2}{3}t^2$$

Setzt man nun a, b, c in die quadratische Gleichung ein, dann ergibt sich

$$y = f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2$$

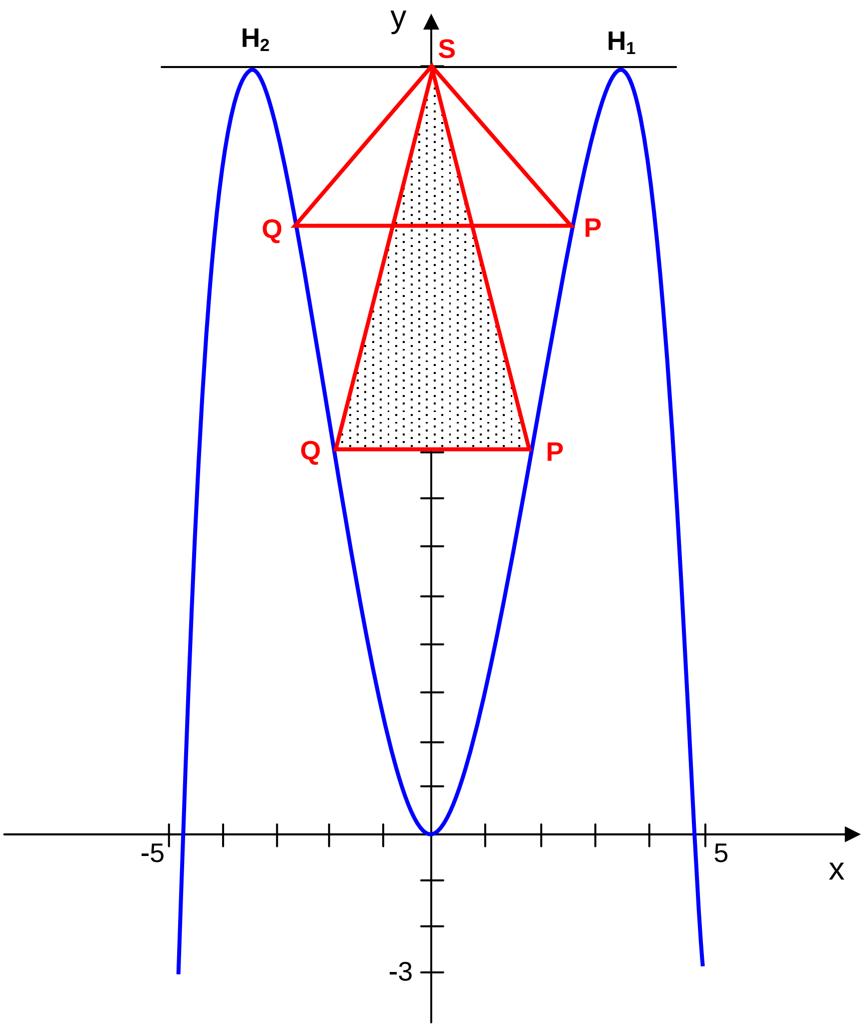
g) Die Verbindungsgerade der beiden Maximum-Punkte des Graphen von **f** $_2$ schneidet die **y** - Achse im Punkt **S**.

Der Punkt **S** und die beiden Kurvenpunkte **P** $\left(x_p ; f_2\left(x_p\right)\right)$ und **Q** $\left(-x_p ; f_2\left(-x_p\right)\right)$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks **QPS**.

Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal? Gib den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks **QPS** an.

****

Diese Teilaufgabe ist eine typische Extremwert-Aufgabe, die sich aus den Eigenschaften einer Funktion ergibt. In der folgenden Skizze soll veranschaulicht werden, um welches Dreieck es sich handelt.



Für das Dreieck QPS gibt es viele Möglichkeiten, im Bereich der reellen Zahlen sogar unendlich viele. Zwei mögliche Dreiecke QPS sind in der Skizze dargestellt. Nur ein einziges von allen möglichen Dreiecken QPS hat den maximalen Flächeninhalt.

Für jedes Dreieck QPS gelten folgende Bedingungen.

Die Hochpunkte H_2 und H_1 sind jeweils gleich weit von der y - Achse entfernt. Die Punkte Q und P können auf der (symmetrischen) Funktionskurve liegen und werden durch die Bedingung $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ bestimmt.

Danach kann der x - Wert für jeden möglichen Punkt Q und P nur zwischen x > 0 und x < $2\sqrt{3}$ liegen. Die untere Grenze 0 ergibt sich aus der Tatsache, dass x > 0 sein muss, weil sonst das Dreieck QPS keine Basisseite hätte und dann gar nicht zustande kommen würde. Die obere Grenze für x ergibt sich aus den Koordinaten $\pm t\sqrt{3}$ für die Hochpunkte. Da es sich laut Teilaufgabe um die Funktion mit t = 2 handelt, ergeben sich die Koordinaten für die Hochpunkte $H_2\left(2\sqrt{3};16\right)$ und $H_1\left(-2\sqrt{3};16\right)$.

Nach den Koordinaten für die Punkte **P** $\left(x_p;f_2\left(x_p\right)\right)$ und **Q** $\left(-x_p;f_2\left(-x_p\right)\right)$ handelt es sich in jedem Fall um ein gleichschenkliges Dreieck, für das gilt Grundseite $g = 2x_p$ (= Strecke QP) und Höhe $h_g = 16 - f_2\left(x_p\right)$.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks lässt sich berechnen mit

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$$

$$g = 2x_p$$

$$h_g = 16 - f_2\left(x_p\right)$$

$$h_g = 16 - \left(-\frac{1}{9}x_p^4 + \frac{8}{3}x_p^2\right) = 16 + \left(\frac{1}{9}x_p^4 - \frac{8}{3}x_p^2\right)$$

Den Klammerausdruck übernimmt man aus Teilaufgabe **e)**

$$A\left(x_p\right) = \frac{1}{2} \cdot 2x_p \cdot \left(16 + \frac{1}{9}x_p^4 - \frac{8}{3}x_p^2\right)$$

$$A\left(x_p\right) = \frac{1}{9}x_p^5 - \frac{8}{3}x_p^3 + 16x_p$$

Diese Funktion nennt man Zielfunktion der Extremwert-Aufgabe. Will man den maximalen Flächeninhalt berechnen, geschieht das wie die Berechnung von Extremwerten für eine Funktion. Man bildet die 1. Ableitung, setzt die 1. Ableitung = 0 und sucht nach Lösungen für diese Gleichung. Zugleich prüft man mittels der 2. Ableitung (hinreichende Bedingung), ob es sich um ein Maximum handelt.

$$A'\left(x_p\right) = \frac{5}{9}x_p^4 - 8x_p^2 + 16$$

$$A''\left(x_p\right) = \frac{20}{9}x_p^3 - 16x_p$$

$$A'(x_p) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{5}{9}x_p^4 - 8x_p^2 + 16 \;=\; 0$$

Für diese Gleichung muss nach Lösungen gesucht werden. Es handelt sich zwar um eine Gleichung höheren Grades, für es normalerweise nur komplizierte Lösungswege gibt, doch bei näherer Betrachtung sieht man, dass in dieser Gleichung 4. Grades eine Gleichung 2. Grades (quadratische Gleichung) steckt. Deshalb benutzt man einen Rechentrick und ersetzt die 2. Potenz durch einen Ausdruck mit 1. Potenz. Man nennt das auch Substitution (Ersetzung).

$x_p^2 = z$ Danach lautet dieselbe Gleichung

$$A'(x_p) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{5}{9}z^2 - 8z + 16 \;=\; 0$$

Man sieht, dass es sich hier um die allgemeine Form der quadratischen Gleichung handelt. Um eine solche Gleichung zu lösen, muss allerdings das erste Glied der Gleichung ohne Koeffizient stehen (bzw. mit Koeffizient 1). Weil der Koeffizient ein Faktor ist, wird die ganze Gleichung durch den Koeffizienten dividiert. Die Ergebnis-Gleichung nennt man auch Normalform der quadratischen Gleichung (Die Lösungsformel und der Satz des Vieta beziehen sich bekanntlich stets auf die Normalform.)

$$\frac{5}{9}z^2 - 8z + 16 = 0 \qquad | \quad : \frac{5}{9}$$

$$z^2 - \frac{72}{5}z + \frac{144}{5} = 0$$

Eine solche Teilgleichung wird manchmal auch als Hilfsfunktion der Extremwertaufgabe bezeichnet. Diese quadratische Gleichung kann mittels der allgemeinen Lösungsformel gelöst werden. Die Lösungsformel bezieht sich auf die Normalform der quadratischen Gleichung

$$y = f(x) = x^2 + px + q$$

und lautet

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Nun braucht man bloß einzusetzen

$$x = z \qquad p = -\frac{72}{5} \qquad q = \frac{144}{5}$$

$$z_{1,2} = \frac{36}{5} \pm \sqrt{\frac{1296}{25} - \frac{144}{5}} \;=\; \frac{36}{5} \pm \sqrt{\frac{576}{25}}$$

$$z_1 = \frac{36}{5} + \frac{24}{5} = 12$$

$$z_2 = \frac{36}{5} - \frac{24}{5} = \frac{12}{5}$$

Nun gilt

$x_p^2 = z$ Also ist

$$z_1 = x_p^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad |x_p| = 2\sqrt{3}$$

$$x_{p1} = 2\sqrt{3}$$

$$x_{p2} = -2\sqrt{3}$$

$$z_2 = x_p^2 = \frac{12}{5} \quad \Rightarrow \quad |x_p| = \frac{2}{5}\sqrt{15}$$

$$x_{p3} = \frac{2}{5}\sqrt{15}$$

$$x_{p4} = -\frac{2}{5}\sqrt{15}$$

Nach der Bedingung ist $0 < x_p < 2\sqrt{3}$. Also kommt als Lösung nur $x_{p3} = \frac{2}{5}\sqrt{15}$ in Frage.

Die Prüfung der hinreichenden Bedingung ergibt

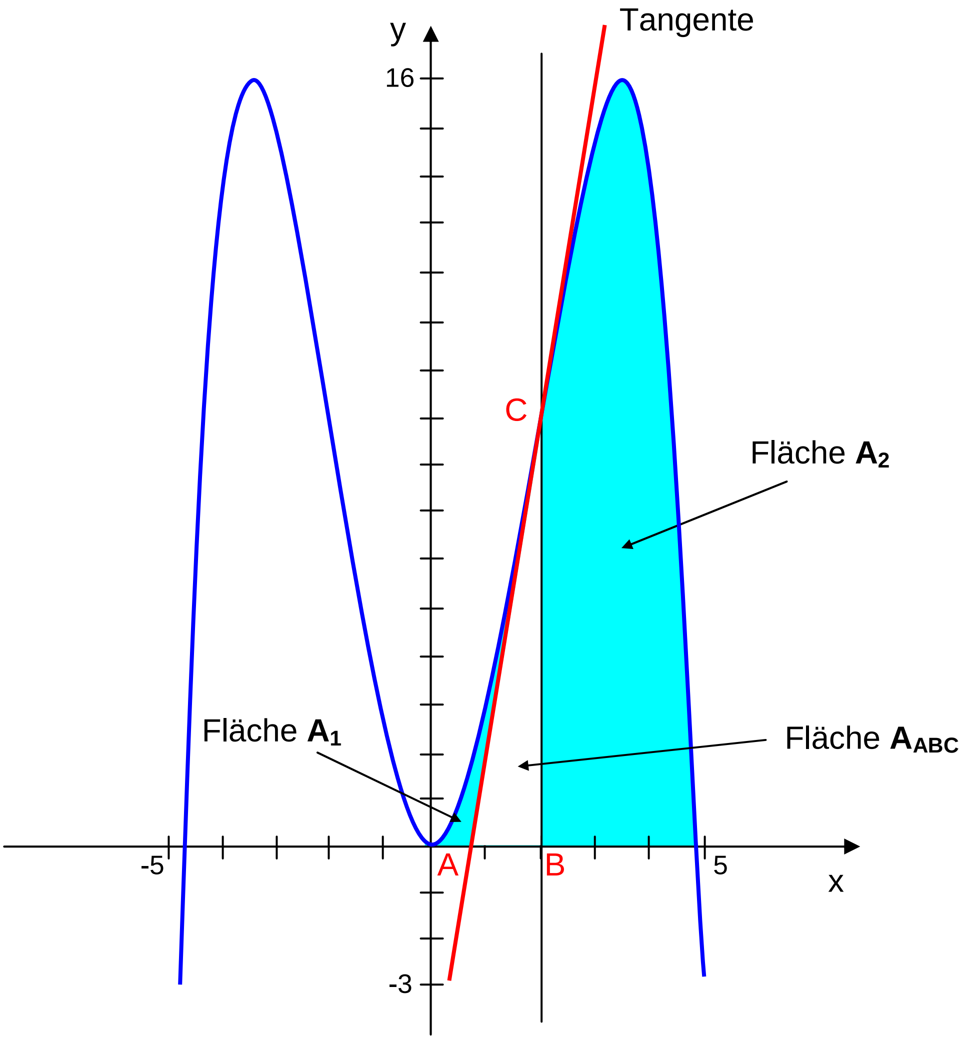
$$\mathrm{A}''\left(\frac{2}{5}\sqrt{15}\right) = -\frac{64}{15}\sqrt{15} < 0$$ es handelt sich um ein lokales Maximum.

Der gefundene x - Wert wird nun in die Zielfunktion eingesetzt und man erhält den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks. Weil die Aufgabe keine Einheiten vorgibt, erhält der Flächeninhalt die Einheiten-Bezeichnung FE für Flächen-Einheit.

$$\mathrm{A}\left(\frac{2}{5}\sqrt{15}\right) = \sqrt{15}\left(\frac{32}{125} - \frac{320}{125} + \frac{800}{125}\right) = \frac{512}{125}\sqrt{15} \approx 15{,}9\ \mathrm{FE}$$

h) Der Graph von $\mathbf{f}_{\mathbf{t}}$, die Tangente an den Graphen im Wendepunkt im 1. Quadranten und die **x** - Achse begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt **A (t)**. Berechne **A (t)**.

****



Für die Aufgabe gibt es zwei Lösungen. Sowohl Fläche A_1 als auch Fläche A_2 + A_{ABC} erfüllen die genannten Bedingungen. In beiden Fällen muss auch die Fläche des eingeschlossenen Dreiecks ABC berechnet werden.

Es soll zuerst die Fläche A_1 berechnet werden. Es handelt sich um die Berechnung eines bestimmten Integrals. Dafür müssen die Intervallgrenzen ermittelt werden. Bei näherer Betrachtung zeigt sich, dass man die Fläche A_1 berechnen kann, indem man die Fläche unter der Funktionskurve in den Intervallgrenzen 0 und x (B) berechnet und davon die Dreiecksfläche ABC abzieht.

Zunächst sollen die Koordinaten der bekannten Punkte B und C gegeben werden, wobei C der bereits ermittelte Wendepunkt ist und B sich aus ihm ergibt, weil die Strecke BC die Seite des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist und deshalb senkrecht auf der x - Achse steht.

$$B(t;0)$$

$$C\left(t;\frac{5}{9}t^4\right)$$

Wie ermittelt man die Koordinaten des Punktes A ? Punkt A ist offensichtlich der Punkt, wo die Tangente die x - Achse schneidet, also eine Nullstelle der Tangente. Wenn man die Gleichung für die Tangente kennt, kann man diesen Punkt einfach berechnen.

Man weiß, dass die 1. Ableitung der Anfangsfunktion = der Anstieg der Tangente ist. Also ist die 1. Ableitung für den Wendepunkt C = der Anstieg der Tangente in diesem Punkt. Damit hat man bereits den Anstieg der Tangentengleichung. Die Tangente hat - wie jede Gerade - die allgemeine Gleichung

$$y = mx + n$$

wobei m der Anstieg ist (der darüber bestimmt, ob die Gerade steigt oder fällt) und n das absolute Glied.

$$f'(t) = -\frac{4}{9}t^3 + \frac{4}{3}t^3 = \frac{8}{9}t^3 \quad = \quad m$$

Das absolute Glied n erhält man, wenn man die Geradengleichung in Form der sog. Punktrichungsgleichung der Geraden schreibt, die Thema der Analytischen Geometrie ist. (Diese Gleichung kann man wie alle hier benutzten Formeln aus einem Tafelwerk oder einer Formelsammlung entnehmen)

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

In diese Gleichung werden der Anstieg m und die Koordinaten des Wendepunktes eingesetzt.

$$y - \frac{5}{9}t^4 = \frac{8}{9}t^3(x-t) \quad = \quad \frac{8}{9}t^3 x - \frac{8}{9}t \qquad | \qquad + \frac{5}{9}t^4$$

Daraus ergibt sich die Tangentengleichung

$$y = \frac{8}{9}t^3 x - \frac{1}{3}t^4$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich für

$$0 = \frac{8}{9}t^3 x - \frac{1}{3}t^4$$

$$x = \frac{3}{8}t$$

Das ist also der x - Wert für die Nullstelle der Tangente und somit $\left(\frac{3}{8}t;0\right)$ die Koordinaten für den Punkt A.

Damit sind alle drei Punkte ABC bekannt.

Fläche A_1

$$A_1 = \int_0^t f_t(x)\,dx - A_{ABC} \quad | \quad A_{ABC} = \frac{1}{2} g \cdot h_g \quad | \quad g = t - \frac{3}{8}t \quad | \quad h_g = f_t(t)$$

Für das bestimmte Integral benötigt man die Stammfunktion $f_t(x)\,dx$ der Anfangsfunktion. Die Integralrechnung ist die Umkehrung der Differenzialrechnung. Will man eine Stammfunktion zu einer Anfangsfunktion finden, kann man sich vorstellen, dass die Anfangsfunktion die 1. Ableitung der gesuchten Stammfunktion darstellt. Wie muss also die Stammfunktion aussehen, damit sich die Anfangsfunktion als 1. Ableitung davon ergeben würde?

Anfangsfunktion

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2$$

Man muss sozusagen die Ableitungsregel für Potenzen "rückwärts" ausführen: Den Exponenten um 1 erhöhen und dann den Koeffizienten (Beifaktor) durch den (um 1 erhöhten) Exponenten dividieren.

Beispiel: Stammfunktion für $-\frac{1}{9}x^4$

$x^5 \Rightarrow -\frac{1}{9} : 5 = -\frac{1}{45} \Rightarrow -\frac{1}{45}x^5$ Würde man davon die 1. Ableitung bilden, erhält man $-\frac{1}{9}x^4$

Die Stammfunktion der Anfangsfunktion lautet demnach

$f_t(x)dx = -\frac{x^5}{45} + \frac{2}{3}t^2 x^3$ Wie bei der Ableitung bleibt auch hier der Parameter t unberührt.

$$A_1 = \int_0^t \left(-\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2\right)dx - A_{ABC} \quad | \quad A_{ABC} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{3}{8}t\right) \cdot \frac{5}{9}t^4$$

$$A_1 = \left[-\frac{x^5}{45} + \frac{2}{9}t^2 x^3\right]_0^t - \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{72}t^5$$

$$A_1 = \left[\left(-\frac{t^5}{45} + \frac{2}{9}t^5\right) - (0)\right] - \frac{25}{144}t^5$$

$$A_1 = \frac{9}{45}t^5 - \frac{25}{144}t^5 = \frac{19}{720}t^5$$

Fläche A_2 + A_{ABC}

Die Fläche A_2 ist die Fläche unter Funktionskurve in den Intervallgrenzen **t** und Nullstelle $\sqrt{6}\,t$ plus die Fläche des Dreiecks ABC.

$$A_2 = \int_t^{\sqrt{6}\,t} f_t(x)dx + A_{ABC}$$

$$A_2 + A_{ABC} = \left[-\frac{x^5}{45} + \frac{2}{9} t^2 x^3 \right]_t^{\sqrt{6}t} + \frac{25}{144} t^5$$

$$A_2 + A_{ABC} = \left[\left(-\frac{36\sqrt{6}}{45} t^5 + \frac{12\sqrt{6}}{9} t^5 \right) - \left(-\frac{t^5}{45} + \frac{2}{9} t^5 \right) \right] + \frac{25}{144} t^5$$

$$A_2 + A_{ABC} = \frac{384\sqrt{6} - 19}{720} t^5$$

****