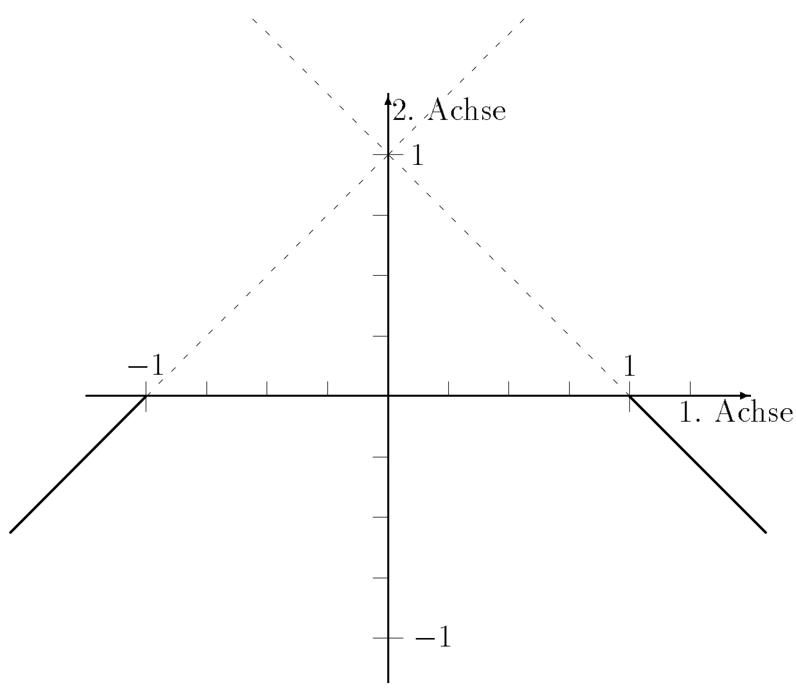
12M1, 1. Klausur in 12/I	02. 10. 2001
Name: ______________________	
Thema: Differentialrechnung rationaler Funktionen	

Wichtiger Hinweis: Rechnen und begründen Sie ausführlich!

1. Bilden Sie die erste Ableitung:
   a) $f(x) = 2x \cdot \cos(x)$
   b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^3 - x + 1}$
   c) $f(x) = x^4 \cdot \sin(x) + \cos(2x)$
   d) $f(x) = (v(x))^n \quad$ (für eine differenzierbare Funktion $v(x)$ und $n \in \mathbb{N}$)
   e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x) \cdot \left(\frac{3}{2}x^3 + x - 12\right)$

2. Betrachten Sie die Funktionsgraphen und -terme auf dem separaten Blatt. Ordnen Sie jedem Graph begründend eine Funktionsgleichung zu!

3. Zwei senkrecht zueinander liegende, gerade Straßenstücke sollen zwischen den Punkten $(-1|0)$ und $(1|0)$ durch den Graph einer ganzrationalen Funktion verbunden werden. Damit der Übergang möglichst glatt wird, sollen die Funktionen, deren Graphen die Straßenteile beschreiben, an den Anschlussstellen -1 und 1 in der ersten und zweiten Ableitung übereinstimmen.



Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion, deren Graph im Intervall $[-1; 1]$ die geforderte Verbindung beschreibt!

Bitte wenden!

4. Für $k \in \mathbb{R}$ ist die Funktionenschar f_k gegeben durch die Gleichung

$$f_k(x) = \frac{kx^2 + 1}{x}.$$

Ohne weitere Rechnung dürfen Sie verwenden:

$$f_k'(x) = \frac{kx^2 - 1}{x^2}, \qquad f_k''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f_k'''(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Untersuchen bzw. bestimmen Sie:

a) Definitionsbereich,

b) Symmetrieverhalten des Graphen,

c) Nullstellen, Schnittpunkt mit der 2. Achse,

d) Art der Definitionslücken, Verhalten der Funktion bei Annäherung an die Definitionslücken,

e) Asymptoten, Verhalten der Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$,

f) Hoch-, Tief-, Sattelpunkte, Monotoniebereiche,

g) Wendepunkte, Krümmungsbereiche,

h) Skizze der Graphen von f_{-1}, f_0 und f_1 in ein Koordinatensystem.

5. Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktionenschar $f_{a,b}$ mit

$$f_{a,b}(x) = \sin(-x + a + b) \cdot \cos(x) + \cos(-x + a + b) \cdot \sin(x).$$

a) Zeigen Sie, dass für die Ableitung aller Funktionen $f_{a,b}$ gilt: $f'_{a,b}(x) = 0$!
Wie muss demnach der Graph jeder Funktion $f_{a,b}$ aussehen?

b) Bilden Sie $f_{a,b}(0)$ und $f_{a,b}(b)$ und begründen Sie, dass folgendes Additionstheroem für die Sinusfunktion gilt:

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b).$$

Viel Erfolg!

12M1, 1. Klausur in 12/I
Musterlösung Aufgabe 4

a) Der Definitionsbereich für alle f_k ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) Es ist $f_k(-x) = \frac{k(-x)^2+1}{-x} = -\frac{kx^2+1}{x} = -f_k(x)$. Daher sind alle Graphen von f_k punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$.

c) Da f_k für 0 nicht definiert ist, kann es keinen Schnittpunkt mit der zweiten Achse geben.
Nullstellen: $f_0(x) = \frac{1}{x}$ hat keine Nullstellen. Für $k \neq 0$ ergibt sich für die Nullstellen die Bedingung $x^2 = -\frac{1}{k}$. Für $k > 0$ besitzt diese Gleichung keine Lösung, also hat f_k für $k > 0$ keine Nullstellen. Für $k < 0$ hat f_k die Nullstellen $\sqrt{-\frac{1}{k}}$ und $-\sqrt{-\frac{1}{k}}$.

d) Die Nullstelle 0 der Nennerfunktion lässt sich nicht (vollständig) herauskürzen. Daher ist 0 eine Polstelle von f_k. Für $h > 0$ ist $f_k(h) = \frac{kh^2+1}{h}$. Für $h \to 0$ geht der Zähler gegen 1, der Nenner gegen $+0$. Es ist daher $\text{r-}\lim\limits_{h\to 0} f_k(h) = +\infty$. Wegen der Punktsymmetrie ist $\text{l-}\lim\limits_{h\to 0} f_k(h) = -\infty$.

e) Es ist $f_k(x) = kx + \frac{1}{x}$. Die Asymptote ist $y = kx$. Für $x \to +\infty$ $[-\infty]$ ist daher $f_k(x) \to +\infty$ $[-\infty]$ für $k > 0$, $f_k(x) \to 0$ $[0]$ für $k = 0$ und $f_k(x) \to -\infty$ $[+\infty]$ für $k < 0$.

f) Da $f_0'(x) = -\frac{1}{x^2}$ keine Nullstellen besitzt, hat f_k für $k = 0$ keine Extremstellen.
Für $k \neq 0$ erhält man für die Nullstellen von f_k' die Bedingung $x^2 = \frac{1}{k}$. Diese Gleichung hat für $k < 0$ keine Lösung, so dass f_k für $k < 0$ keine Extremstellen hat.
Als mögliche Extremstellen erhält man für $k > 0$ die Nullstellen $-\sqrt{\frac{1}{k}}$ und $\sqrt{\frac{1}{k}}$ von f_k'. Da $f_k''(-\sqrt{\frac{1}{k}}) = \frac{2}{-\sqrt{\frac{1}{k}}(\frac{1}{k})} < 0$ ist, ist $\left(-\sqrt{\frac{1}{k}}\middle| -2\sqrt{k}\right)$ ein Hochpunkt und (wegen der Punktsymmetrie der Graphen von f_k zum Ursprung) $\left(\sqrt{\frac{1}{k}}\middle| 2\sqrt{k}\right)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f_k für $k > 0$.
Für $k \leq 0$ ist f_k' stets negativ. Also ist f_k für $x < 0$ und für $x > 0$ streng monoton fallend.
Für $k > 0$ ist f_k für $x \leq -\sqrt{\frac{1}{k}}$ streng monoton wachsend, für $-\sqrt{\frac{1}{k}} \leq x < 0$ und für $0 < x \leq \sqrt{\frac{1}{k}}$ streng monoton fallend und für $\sqrt{\frac{1}{k}} \leq x$ streng monoton wachsend.
<u>Beachten Sie:</u> Die Monotonie wird durch die Polstellen stets unterbrochen. Dies lässt sich anhand der Definition der Monotonie klar machen: Eine Funktion f ist auf einer Teilmenge D des Definitionsbereichs D_f streng monoton wachsend [fallend], falls für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$ $[f(x_1) > f(x_2)]$.

g) f_k'' hat keine Nullstellen. Es existieren daher keine Wendestellen. Da f_k'' für $x < 0$ $[x > 0]$ negativ [positiv] ist, sind alle Graphen von f_k für $x < 0$ $[x > 0]$ rechtsgekrümmt [linksgekrümmt].