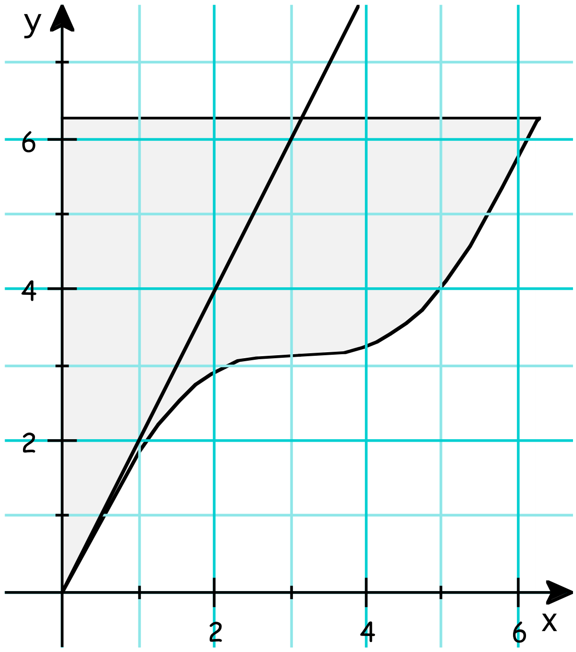
# Aufgaben zur Berechnung von Flächen Klasse 12

① Das Bild zeigt die Funktion $f: x \mapsto x + \sin(x)$ im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ sowie die Gerade mit der Gleichung $y = 2\pi$ und die Tangente an das Schaubild von f im Ursprung.




a) Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)dx$ , $\int_0^\pi f(x)dx$ sowie $\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} f(x)dx$ .

b) Berechnen Sie den Inhalt des markierten Flächenstücks.

c) In welchem Verhältnis teilt die waagrechte Tangente an das Schaubild von f das Flächenstück aus Teilaufgabe b) ?

d) In welchem Verhältnis teilt die Tangente im Ursprung das Flächenstück aus Teilaufgabe b) ?

a) $\int_0^1 \left(x+\sin(x)\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \cos(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \cos(1) - (0 - \cos(0)) = \frac{3}{2} - \cos(1) \approx 0,959698$

$\int_0^\pi \left(x+\sin(x)\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \cos(x)\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2 - \cos(\pi) - (0 - \cos(0)) = \frac{1}{2}\pi^2 + 2$

$\int_{\frac{\pi}{3}}^\pi \left(x+\sin(x)\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \cos(x)\right]_{\frac{\pi}{3}}^\pi = \frac{1}{2}\pi^2 - \cos(\pi) - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos(\frac{\pi}{3})\right) = \frac{4}{9}\pi^2 + \frac{3}{2}$

b) $A = 4\pi^2 - \int_0^{2\pi} (x+\sin(x))dx = 4\pi^2 - 2\pi^2 = 2\pi^2$

c) waagrechte Tangente: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi \; (0 \le x \le 2\pi)$

Punkt mit waagrechter Tangente: $W(\pi|\pi)$

$A_{unten} = \pi^2 - \int_0^\pi (x+\sin(x))dx = \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - 2 = \frac{\pi^2}{2} - 2$ ; $A_{oben} = 2 + \frac{3\pi^2}{2}$

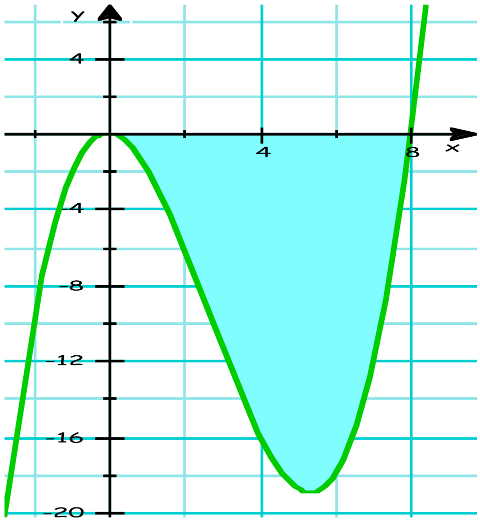
Verhältnis $A_{oben} : A_{unten} = \frac{3\pi^2+4}{\pi^2-4} \approx 5,72591:1$

d) Tangente im Ursprung: $m = 1 + \cos(0) = 2$ ; $y = 2\cdot x$

$A_{Dreieck} = \pi^2$ ; $A_{Rest} = \pi^2$ ; die Tangente halbiert die Fläche.

② Gegeben ist die Funktionenschar f(t,x) durch $f(t,x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{t}{4}$, $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie t so, dass die x-Achse eine Tangente an das Schaubild G von f ist und zeichnen Sie dieses Schaubild (bzw. lassen es zeichnen…).
Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks zwischen G und der x-Achse.




Doppelte Nullstelle für t = 0: $f(0,x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2$ mit x = 0 als doppelter und x = 8 als zweiter Nullstelle.

$$\int_0^8 \left(\frac{1}{4}x^3 - 2x^2\right)dx = \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^8 =$$

$$= \frac{1}{16}8^4 - \frac{2}{3}8^3 - 0 = 256 - \frac{1024}{3} = -\frac{256}{3}$$

also ist der gesuchte Flächeninhalt $A = \frac{256}{3}$

③ Eine ganzrationale Funktion f vierten Grades habe folgende Eigenschaften: ihr Schaubild hat im Ursprung einen Terrassenpunkt (= Sattelpunkt) und schneidet die x-Achse außerdem im Punkt N(6|0).
Die Fläche zwischen der x-Achse und dem Schaubild von f hat den Inhalt A = 19,44 FE.
Bestimmen Sie den Funktionsterm von f.

Funktionsterm wg. Sattelpunkt (Ursprung, waagrechte Tangente, WeP) und N:
$f(x) = a \cdot x^3 \cdot (x - 6)$

$$\int_0^6 \left(ax^4 - 6ax^3\right)dx = a \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^6 = -\frac{1944}{5}a;$$

$A = -\frac{1944}{5}a$ oder $A = \frac{1944}{5}a$; Also ist a = –0,05 oder a = 0,05

④ Berechnen Sie k aus $\int_0^k \left(2x^2 - x\right)dx = \int_1^k \left(2x^2 - 1\right)dx$.

$$\int_0^k \left(2x^2 - x\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^k = \frac{2}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2\ ;\ \int_1^k \left(2x^2 - 1\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - x\right]_1^k = \frac{2}{3}k^3 - k + \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 = \frac{2}{3}k^3 - k + \frac{1}{3} \iff \frac{1}{2}k^2 - k + \frac{1}{3} = 0 \iff k = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \vee k = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

# Aufgaben zur Berechnung von Flächen Klasse 12

⑤ Durch $f(t,x) = \frac{1}{4}x^4 - t^2x^2$ ist für $t \geq 0$ eine Funktionenschar gegeben..

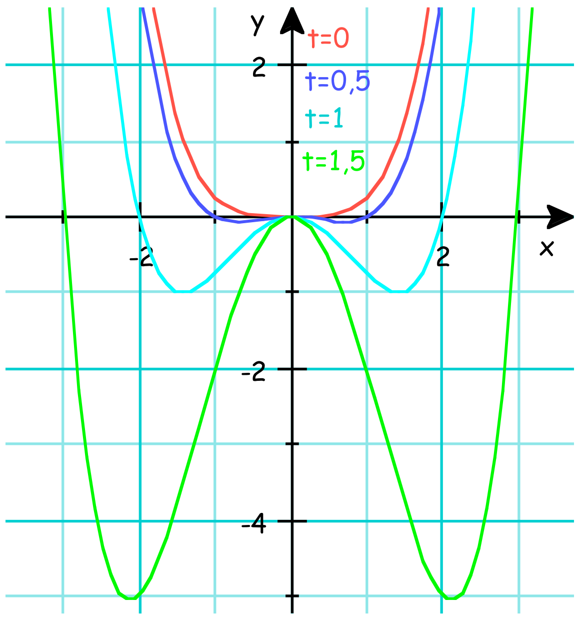
a) Lassen Sie sich die Schaubilder $G_t$ für einige Werte von t zwischen 0 und 1,5 zeichnen.

b) Berechnen Sie die Gleichung der Kurve T, auf der alle Tiefpunkte der Schar liegen.

c) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks zwischen der Verbindungsstrecke der Tiefpunkte einer Scharkurve und der Kurve T.

d) In welchem Verhältnis teilt die Kurve $G_t$ die in c) berechnete Fläche ?

a) siehe rechts.




b) $x^4 - 2t^2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(x^2 - 2t^2\right) = 0$

$x = 0 \vee x = t\sqrt{2} \vee x = -t\sqrt{2}$

der Ursprung ist Hochpunkt,

die Tiefpunkte sind $T_{links}(-t\sqrt{2}\,|-t^4)$ und $T_{rechts}(t\sqrt{2}\,|-t^4)$

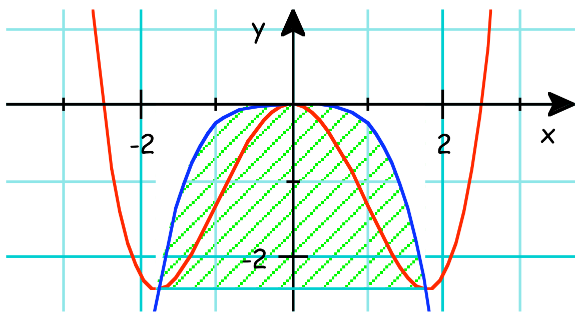
Kurve der Tiefpunkte:

$x = t\sqrt{2} \Leftrightarrow t = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$y = -t^4 \Longrightarrow y = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^4 = -\frac{x^4}{4}$

Die Kurve aller Tiefpunkte hat also die Gleichung T: $y = -\frac{1}{4}x^4$.

c) $A_1 = 2 \cdot t^5\sqrt{2} + 2 \cdot \int\limits_0^{t\sqrt{2}} \left(-\frac{x^4}{4}\right)dx = \frac{8}{5} \cdot \sqrt{2} \cdot t^5$




d) Fläche zwischen $G_t$ und T:

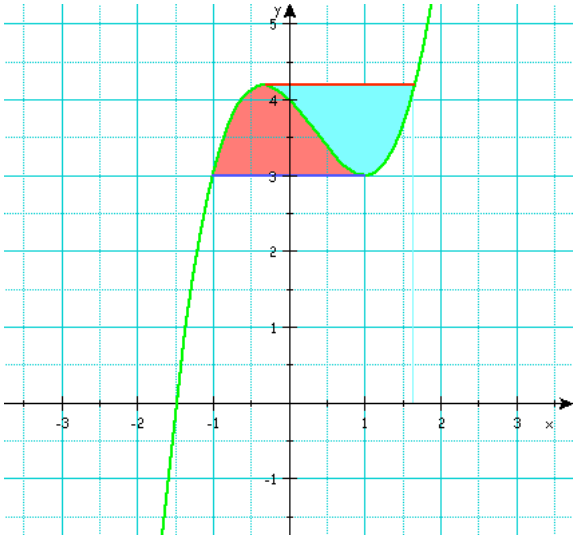
$$A_2 = 2 \cdot \left( \int\limits_0^{t\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{4}x^4\right)dx - \int\limits_0^{t\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4}x^4 - t^2x^2\right)dx \right) = 2 \cdot \int\limits_0^{t\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}x^4 + t^2x^2\right)dx = \frac{4}{15}\sqrt{2} \cdot t^5$$

Verhältnis: $A_1 : A_2 = 6 : 1$

# Aufgaben zur Berechnung von Flächen Klasse 12

⑥ Es ist $f(t,x) = x^3 + tx^2 + tx + 4$, $t \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie t so, dass x = 1 eine Extremstelle ist. Die Tangenten in den Extrempunkten der zum gefundenen t-Wert gehörenden Kurve begrenzen mit dieser jeweils eine Fläche.
Zeigen Sie, dass diese beiden Flächen gleichen Inhalt haben
a) durch Rechnung
b) durch Überlegung

kein weiterer Kommentar...




⑦ Es ist $f(x) = ax^3 + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie a und b so, dass P(4|0) auf dem Schaubild liegt und außerdem das im 1. Feld liegende Quadrat über der Strecke $\overline{OP}$ durch das Schaubild von f halbiert wird.

$f(4) = 0$: $64a + 4b = 0 \Longleftrightarrow b = -16a$

$f(x) = ax^3 - 16ax$ ; $\int_0^4 \left(ax^3 - 16ax\right)dx = -64a = 8 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$

gesuchte Funktion: $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + 2x$ (weil das Schaubild für $0 \leq x \leq 4$ ganz innerhalb des Quadrates verläuft. )

⑧ Die Temperatur eines Tages verlaufe nach der Gleichung $y = 15 - \frac{1}{20}\left(x - 14\right)^2$. Dabei bedeute y die Temperatur in °C und x die Zeit in Stunden, beginnend mit 0 Uhr bei x = 0.
a) Berechnen Sie die mittlere Tagestemperatur.
b) Berechnen Sie die mittlere Temperatur zwischen 0 Uhr und 12 Uhr.
c) Berechnen Sie die mittlere Temperatur zwischen 12 Uhr und 24 Uhr.

a) 12,4 °C ; b) 11,2 °C ; c) 13,6 °C

⑨ Gegeben ist jeweils eine Funktionenschar. Bestimmen Sie den Parameter jener Scharfunktion, die mit der x-Achse das größte bzw. kleinste Flächenstück einschließt. Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

a) $f(t,x) = tx - \frac{1+t^2}{24}x^2$ Maximum für $t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3}$

b) $f(t,x) = (1 - 4t)\cdot x - t^2\cdot x^2$ lokales Maximum für t = 1, kein absolutes Max.

c) $f(t,x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\cdot t\cdot x + 4\cdot t^2 - 4\cdot t$ Maximum für t = 1

d) $f(t,x) = 2x - \frac{t-1}{t}x^2$ kein Extremum vorhanden

e) $f(t,x) = \frac{1}{3}t \cdot x^3 - (t+1) \cdot x$ Maximum für t = 1

f) $f(t,x) = \frac{1}{3}t \cdot x^3 - (t-1) \cdot x^2$ Minimum für t = -3

g) $f(t,x) = \frac{1}{t}x^2 + x - \frac{4}{t}$ Minimum für $t = -2\sqrt{2} \vee t = 2\sqrt{2}$

h) $f(t,x) = \frac{1}{t}x^2 + t - 12$ Maximum für t = 3

⑩ f sei eine ganzrationale Funktion der Form $f(x) = x^2 + bx + c$ mit der Eigenschaft

a) $f(x) + f'(x) = x^2$ b) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3}$ c) $\int_0^1 f(x)dx = -1$

Bestimmen Sie jeweils f(x).

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ b) Schar $f(t,x) = x^2 + tx - \frac{t}{2}$ c) Schar $f(t,x) = x^2 + tx - \frac{t}{2} - \frac{4}{3}$

⑪ Es ist $f(x) = \frac{1}{8}x(x-6)^2 + 4$.

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte sowie den Wendepunkt des Schaubilds von f.
b) Stellen Sie die Gleichung der Wendetangente auf und fertigen Sie eine Zeichnung mit dem Schaubild von f und der Wendetangente an.
c) Berechnen Sie die Größe der Fläche, die von der Wendetangente, der y-Achse und dem Schaubild von f eingeschlossen wird.

a) $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$
Nullstellen der Ableitung: $x = 2 \vee x = 6$
$E_1(2|8)$ ; $E_2(6|0)$ ; $W(4|6)$ wg. Symmetrie

b) $f'(4) = -\frac{3}{2}$
w: $y = -\frac{3}{2}(x - 4) + 6 = -\frac{3}{2}x + 12$

c) A = 8