Aufgaben zu Folgen und Reihen — Klasse 12

① Setzen Sie die nachstehenden Zahlenfolgen jeweils um 4 weitere Glieder fort und geben Sie jeweils ein explizites oder rekursives Bildungsgesetz an:

a) $\frac{3}{2}; 3; \frac{9}{2}; 6; \ldots$ b) $+4; -1; -2; +5; -8; \ldots$ c) $\frac{7}{2}; -3; \frac{5}{2}; -2; \ldots$

② Untersuchen Sie, welche der angegebenen Zahlen Glieder der jeweiligen Zahlenfolge sind:

a) (a_n) mit $a_n = 8 - 5n$: -117 und -3225

b) (a_n) mit $a_n = 7n - n^2$: -450 und -30 c) (a_n) mit $a_n = \frac{12+3n}{6n^2}$: 10 und $\frac{1}{18}$

d) (a_n) mit $a_n = (-1)^n \cdot 2^{-n}$: -2 und $\frac{1}{64}$ e) (a_n) mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$: $2{,}85$ und $\frac{3125}{1024}$

③ Berechnen Sie jeweils 5 Folgeglieder und geben Sie ein explizites Bildungsgesetz an, falls dies möglich ist:

a) $a_1 = 7$; $a_{n+1} = a_n - 3$ b) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1$ c) $a_1 = -4$; $a_n = a_{n-1} + 5$

d) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + n$ e) $a_1 = 1$; $a_2 = -1$; $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

④ Untersuchen Sie die Zahlenfolgen auf Monotonie:

a) (a_n) mit $a_n = (3+n)^2 - 4 \cdot n^2$ b) (a_n) mit $a_n = \frac{2}{n^2+n}$

c) (a_n) mit $a_n = \frac{n}{2n-1}$ d) (a_n) mit $a_n = \frac{n^2-10n+26}{n^2+4n+4}$

⑤ Untersuchen Sie die Zahlenfolgen auf die Existenz von Schranken und geben sie im Falle der Existenz solche an:

a) (a_n) mit $a_n = \frac{n}{3n-2}$ b) (a_n) mit $a_n = \frac{2n}{3n-4}$ c) (a_n) mit $a_n = \frac{n^2+1}{n}$

⑥ Bei einer arithmetischen Zahlenfolge ist die Summe aus dem 5. und dem 11. Glied gleich 58, die Summe aus dem 6. und dem 14. Glied gleich 40. Geben Sie das Bildungsgesetz an und berechnen Sie das 12. Folgeglied.

⑦ In einer geometrischen Zahlenfolge ist $a_1 = \frac{2}{3}$ und $a_{10} = 13122$. Wie heißt das Bildungsgesetz und wie das 15. Folgeglied ?

⑧ Drei Zahlen, deren Summe 39 ist, seien die ersten Glieder a_1, a_2 und a_3 einer geometrischen Zahlenfolge. Vermindert man die größte der drei Zahlen um 12, so entstehen die ersten drei Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge. Wie heißen die drei Folgeglieder und wie lauten die Bildungsgesetze für die arithmetische und die geometrische Zahlenfolge ?

⑨ Ermitteln Sie die ersten 6 Glieder von Zahlenfolgen (a_n) mit den folgenden Eigenschaften:

1. es ist $a_1 = -\frac{5}{2}$ und $a_5 = 3$.
2. a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 sind in dieser Anordnung die ersten Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.
3. a_4 ; a_5 ; a_6 sind in dieser Reihenfolge die ersten Glieder einer geometrischen Zahlenfolge
4. Die Differenz d der arithmetischen und der Quotient q der geometrischen Zahlenfolge sind gleich.

Aufgaben zu Folgen und Reihen Klasse 12

⑩ Die Folge (a_n) ist jeweils eine arithmetische Zahlenfolge. Vervollständigen Sie die Tabelle:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_{10}	a_{17}	a_{25}	d	a_n
a)	1	5	9						
b)		-5	-7	-9					
c)	$2\frac{1}{10}$		$\frac{53}{10}$		$16\frac{1}{2}$				
d)				-8				$-\frac{1}{3}$	
e)						36	68		
f)					$-\frac{1}{3}$			$\frac{2}{5}$	
g)									$\frac{4n^2-7n}{3n}$

⑪ Die Folge (a_n) ist jeweils eine geometrische Zahlenfolge. Vervollständigen Sie die Tabelle:

	a_1	a_2	a_3	a_5	a_8	a_{11}	a_{15}	q	a_n
a)	6	3	1,5						
b)		$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{12}$					
c)			4	12				...... > 0	
d)					-800			-2,5	
e)				$\frac{3}{80}$			$\frac{12}{5}$	...... > 0	
f)									$2^{n-4} \cdot 5^{2-n}$

Lösungen zu den Folgen-Aufgaben Klasse 12

① a) $a_n = \frac{3}{2}\cdot n$ b) $a_n = (-1)^n \cdot (3n - 7)$ c) $(-1)^n \cdot \frac{n-8}{2}$

② a) $a_{25} = -117$ b) $a_{10} = -30$; $a_{25} = -450$ c) $a_{12} = \frac{1}{18}$

d) $a_6 = \frac{1}{64}$ e) $a_4 = \frac{3125}{24}$

③ a) $a_n = 10 - 3n$ b) $a_n = \frac{1}{2}\cdot(3^n - 1)$ c) $a_n = 5n - 9$

d) $a_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ e) $a_n = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{falls n nicht durch 3 teilbar ist} \\ (-1)^n \cdot 2 & \text{falls n durch 3 teilbar ist} \end{cases}$

④ a) streng monoton fallend b) streng monoton fallend c) streng monoton fallend
d) keine Monotonie

⑤ a) $s = 0$; $S = 1$ b) $s = 0$; $S = 1$ c) $s = 0$

⑥ $a_n = 65 - 4{,}5\cdot n$ $a_{12} = 11$

⑦ $a_n = \frac{2}{3}\cdot 3^{n-1}$ $a_{15} = 3\,188\,646$

⑧ arithmetisch: $a_n = 6\cdot n - 3$; geometrisch: $g_n = 3^n$

⑨ Folgenanfang: -2,5 ; -1 ; 0,5 ; 2 ; 3 ; 4,5 ; ……
arithmetischer Teil: d = 1,5 ; geometrischer Teil: q = 1,5

⑩

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_{10}	a_{17}	a_{25}	d	a_n
a)	1	5	9	13	37	65	97	4	4n - 3
b)	-3	-5	-7	-9	-21	-35	-27	-2	-2n - 1
c)	$2\frac{1}{10}$	3,7	$\frac{53}{10}$	6,9	$16\frac{1}{2}$	27,7	40,5	1,6	1,6n + 0,5
d)	-7	$-7\frac{1}{3}$	$-7\frac{2}{3}$	-8	-10	$-12\frac{1}{3}$	-15	$-\frac{1}{3}$	$-6\frac{2}{3} - \frac{n}{3}$
e)	-28	-24	-20	-16	8	36	68	4	-32 + 4n
f)	$-\frac{59}{15}$	$-\frac{53}{15}$	$-\frac{47}{15}$	$-\frac{41}{15}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{37}{15}$	$\frac{17}{3}$	$\frac{2}{5}$	$-4\frac{1}{3} + \frac{2}{5}n$
g)	-1	$\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	3	$9\frac{2}{3}$	$20\frac{1}{3}$	31	$\frac{4}{3}$	$\frac{4n^2 - 7n}{3n}$

⑪

	a_1	a_2	a_3	a_5	a_8	a_{11}	a_{15}	q	a_n
a)	6	3	1,5	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{512}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
b)	$-\frac{27}{4}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{324}$	$-\frac{1}{8748}$	$-\frac{1}{708588}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{27}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
c)	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}\sqrt{3}$	4	12	$36\sqrt{3}$	324	2916	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{3}\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$
d)	$\frac{4096}{3125}$	$-\frac{2048}{625}$	$\frac{1024}{125}$	$\frac{256}{5}$	-800	12500	$\frac{1953125}{4}$	-2,5	$\frac{4096}{3125}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^{n-1}$
e)	zu	wenig	Platz	$\frac{3}{80}$	für	die Werte	$\frac{12}{5}$	$\sqrt[5]{8}$	$\frac{3}{320}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{4}}\cdot\left(\sqrt[5]{8}\right)^{n-1}$
f)	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{125}$	$\frac{16}{15625}$	$\frac{128}{1953125}$	$\frac{2048}{1220703125}$	$\frac{2}{5}$	$2^{n-4}\cdot 5^{2-n}$