Kl. 12 Mathematik Klassenarbeit 4

Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f mit $f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^4$ mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 2:

Das Schaubild von f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ schließt mit der Normalen im Wendepunkt eine Fläche ein, deren Inhalt zu berechnen ist.

Aufgabe 3: (GTR)

Berechnen Sie näherungsweise den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f mit $f(x) = (x-1)\sqrt{x+3}$ mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 4: (GTR)

In einem Regenauffangbecken befinden sich zu Beobachtungsbeginn $4m^3$ Wasser. Die momentane Änderungsrate des Inhalts wird durch die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+1}$ in m^3/h beschrieben.

a) Wie viel Wasser befindet sich nach 3 Stunden in dem Becken (Näherungswert)?

b) Bestimmen Sie näherungsweise den Zeitpunkt in Minuten, zu dem der Regen am stärksten war. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Aufgabe 5:

Die Parabel mit $y = tx - x^2, t > 1$ schneidet die 1. Winkelhalbierende außer in $O(0|0)$ im Punkt S_t.
Für welches t ist der Inhalt des Flächenstücks, das die Parabel mit der 1. Winkelhalbierenden einschließt gleich groß wie das Quadrat, für das der Ursprung und S_t Eckpunkte sind und von dem 2 Seiten auf den Achsen liegen?

*Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe):

Für jedes $n \in N.n > 0$ ist eine Funktion f_n gegeben durch $f_n(x) = (1-x)^n$.
A_n ist der Inhalt der Fläche, die von den Schaubildern von f_n und f_{n+1} eingeschlossen wird.

a) Für welche n ist $A_n < \frac{1}{90}$?

b) Berechnen Sie $A_1 + A_2 + A_3 + ...$

A1: $f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^4$

Nullstellen $x^3 - \frac{1}{4}x^4 = 0$

$x^3(1 - \frac{1}{4}x) = 0 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

$\int_0^4 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right]_0^4 = 64 - \frac{1024}{20} = \frac{320}{5} - \frac{256}{5} = \frac{64}{5} = 12{,}8$

E: Der Inhalt der Fläche die das Schaubild mit der Fläche einschließt beträgt 12,8 FE

A2: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$

$f'(x) = -3x^2 + 6x - 2$

$f''(x) = -6x + 6$ Wendepunkt $f''(x) = 0$

$-6x + 6 = 0$
$x = 1$ $\quad W(1/0)$

Tangente: Steigung $f'(1) = 1$ $\quad f_1(x) = x + c$
W in $f_1(x)$ $\quad f_1(x) = x - 1$

Normale: $f_2(x) = -x + 1$

$f_2(x) = f(x) \qquad -x^3 + 3x^2 - 2x = -x + 1$
$-x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$

Polynomdiv. $-x^3 + 3x^2 - x - 1 : (x-1) = -x^2 + 2x + 1 \qquad x_0 = 1$

$$
\begin{array}{l}
-(-x^3 + x^2) \\
\quad 2x^2 - x \\
\quad -(2x^2 - 2x) \\
\qquad x - 1 \\
\qquad -(x-1) \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad$ MNF $\Rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{2})}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x_1 = 1 + \sqrt{2}$
$x_2 = 1 - \sqrt{2}$

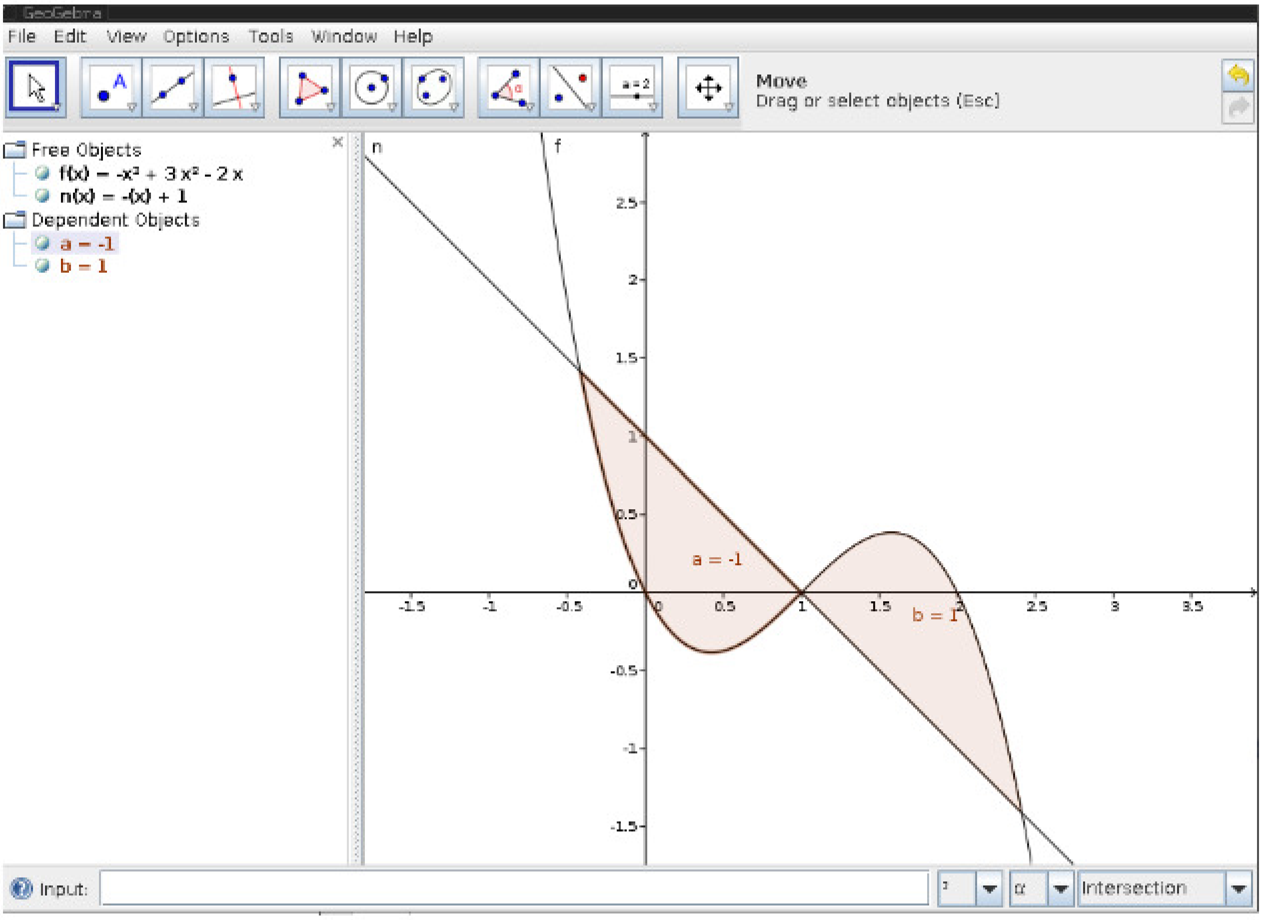
$\int_{1-\sqrt{2}}^{1} (f(x) - f_2(x))\,dx = \int_{1-\sqrt{2}}^{1} (-x^3 + 3x^2 - 2x + x - 1)\,dx = \int_{1-\sqrt{2}}^{1} (-x^3 + 3x - x - 1)$

$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{1-\sqrt{2}}^{1} = \left(-\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 1\right) -$

$$\left(-\frac{1}{4}(1-\sqrt{2})^4 + (1-\sqrt{2})^3 - \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})\right) = -0{,}75 - 0{,}25 = -1$$

Da sowohl die Funktion als auch die Normale punktsymmetrisch zum Punkt P(1/0) sind, gibt es noch eine zweite gleich große Fläche, die von den beiden Funktionen eingeschlossen, und zur bereits berechneten Fläche addiert werden muss.

Die Gesamtfläche beträgt daher: A = |-1| + 1 = **2 FE**



GeoGebra
File Edit View Options Tools Window Help
Move
Drag or select objects (Esc)
Free Objects
f(x) = -x³ + 3 x² - 2 x
n(x) = -(x) + 1
Dependent Objects
a = -1
b = 1
a = -1
b = 1
Input:
Intersection

Aufg. 3:

- berechnen der Schnittpunkte des Schaubilds mit der x-Achse
  $N(1/0)$
- zeichnen des Schaubildes. Für Werte < -3 gibt es keine Lösung
- Berechnen des Integrals $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$ (2nd → Trace → 7)

E: der näherungsweise Inhalt beträgt 8,53 FE^2

Aufg. 4

$f_0(0) = 4\,m^3$ $\quad f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+1}$

a)
- Zeichnen des Schaubildes (GTR)
- Integral $\int_0^3 f(x)\,dx + f(0)$

  $\approx 7{,}3\,m^3 + 4\,m^3 \approx 11{,}3\,m^3$

E: Es befinden sich näherungsweise $11{,}3\,m^3$ Wasser im Becken

b) Bestimmen des Maximums der Funktion $f(x)$
GTR (2nd ; Trace ;
$H(0{,}236 / 4{,}236)$
E: Zum Zeitpunkt $t = 0{,}236h \approx 24$ min war der Regen mit einem Niederschlag von $4{,}236\,m^2$ am stärksten

Aufg. 5

$y = tx - x^2 \quad f(x) = x \quad f(0) = 0 \quad s(x) = x \quad y_s = ts - s^2$

Gesucht t:

$$\left| \int_0^s (f(x) - g(x))\,dx \right| = (ts - s^2) \cdot s$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{t-1}{2}x^2 \right]_0^s = ts^2 - s^3$$

$$-\frac{1}{3}s^3 + \frac{t-1}{2}s^2 = ts^2 - s^3$$

$$\frac{2}{3}s = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}$$

$s = \frac{3}{2}$
$t = 3$