Mathematik LK Test

1. Bestimme die folgenden Grenzwerte.

$$a)\lim_{x\to\infty}(7-\frac{3}{x})\bullet(5+\frac{2}{x-1})$$
$$b)\lim_{x\to\infty}(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{4x^2-1}{x^2})$$
$$c)\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{x+2}$$
$$d)\lim_{x\to\infty}(x^2\bullet\sin\frac{1}{x^2})$$

2. Berechne folgende uneigentliche Integrale.

$$a)\int_1^{\infty}e^{-x}dx$$
$$b)\int_2^{3}\frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$$

3. Gebe eine möglichst einfache gebrochenrationale Funktion f an, für deren Graph y=-x und x=1 Asymptoten sind und deren Graph nicht punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

4. Untersuche die Funktionsschar $f_k(x)=\frac{x^2-k}{x-1}, k\in\mathbb{R}$.
Die Untersuchung auf Wendepunkte darf ausgelassen werden.

Zusatz: Bestimme den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_k für $k=\frac{1}{4}$ mit der x-Achse einschließt.

Lösungen:

1.

$$a)\lim_{x\to\infty}(7-\frac{3}{x})\bullet(5+\frac{2}{x-1})$$
$$=(\lim_{x\to\infty}(7-\frac{3}{x}))\bullet(\lim_{x\to\infty}(5+\frac{2}{x-1}))=(\lim_{x\to\infty}7-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x})\bullet(\lim_{x\to\infty}5+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x-1})=(7-0)(5+0)$$
$$=7\bullet 5=35$$

$$b)\lim_{x\to\infty}(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{4x^2-1}{x^2})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(4-\frac{1}{x^2})}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}+\lim_{x\to\infty}4-\frac{1}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sin x}{\lim\limits_{x\to\infty}x^2}+\lim_{x\to\infty}4-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$$
$$=0+4-0=4$$

$$c)\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\frac{0}{0}$$
$$AnwendenDel'Hospital:$$
$$\lim_{x\to-2}\frac{2x-1}{1}=\lim_{x\to-2}2x-1=2\bullet(-2)-1=-4-1=-5$$
$$d)\lim_{x\to\infty}(x^2\bullet\sin\frac{1}{x^2})="\infty\bullet 0"$$
$$Umformen:$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\bullet\sin\frac{1}{x^2}\bullet\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}="\frac{0}{0}"$$
$$AnwendenDel'Hospital:$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x^2}\bullet(-\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x^2}=\cos(0)=1$$

2.

$$a)\int_1^\infty e^{-x}dx$$

$$\int_1^\infty e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{e^b}+e^{-1})=\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{e^b})+\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e}=e^{-1}=0,3679$$

$$b)\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x-2}}dx;\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}=(x-2)^{-\frac{1}{2}};F(x)=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\bullet x^{-\frac{1}{2}+1}=2\sqrt{x-2}$$

$$\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x-2}}dx=\lim_{a\to2}\int_a^3\frac{1}{\sqrt{x-2}}dx=\lim_{a\to2}\left[2\sqrt{x-2}\right]_a^3=\lim_{a\to2}(2-2\sqrt{a-2})=\lim_{a\to2}2-\lim_{a\to2}2\sqrt{a-2}$$

$$=2-0=2$$

3.

$$f(x)=-x+\frac{1}{x-1}=\frac{-x(x-1)}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{-x(x-1)+1}{x-1}=\frac{-x^2+x+1}{x-1}$$

Begründung: Nach einer Polynomdivision gibt der ganzrationale Anteil die Asymptote an:

$$(-x^2+x+1):(x-1)=-x+\frac{1}{x-1}$$

$$-(-x^2+x)$$

$$------$$

$$1$$

Man sieht: y=-x ist Asymptote.

Damit x=1 eine Asymptote ist, muss x=1 eine Definitionslücke, also eine Nullstelle des Nennerpolynoms sein (1-1=0).

Für Punktsymmetrie müsste gelten: $f(-x)=-f(x)$

Für Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-0)=-f(0)$

$0+\frac{1}{-1}=0-1=-1=-(-0+\frac{1}{-1})=-(-1)=1$ f. A.

4.

$$f_k(x) = \frac{x^2 - k}{x-1}, k \in \mathbb{R}$$

1. Definitionsbereich:

Eine gebrochenrationale Funktion ist an den Nullstellen des Nennerpolynoms nicht definiert. Nun untersuche ich diese Nullstellen, um somit Definitionslücken und schließlich die Definitionsmenge angeben zu können.

$$0 = x - 1$$
$$x = 1$$
$$D = \mathbb{R} / \{1\}$$

2. Symmetrie:

Wir haben die Vermutung, dass weder Achsensymmetrie noch Punktsymmetrie vorliegen.

Für Achsensymmetrie müsste gelten: $f(-x) = f(x)$
Beispiel für x=2:
$f(-2) = f(2)$

$$\frac{4-k}{-2-1} = \frac{4-k}{2-1}$$
$$\frac{4-k}{-3} = \frac{4-k}{1}$$
$$\frac{4-k}{-3} = 4-k$$

Falsche Aussage.

Für Punktsymmetrie müsste gelten: $f(-x) = -f(x)$
Beispiel für x=2:
$f(-2) = -f(2)$

$$\frac{4-k}{-3} = -4+k$$

Falsche Aussage.

→ Der Graph ist weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch.

3. Verhalten für betragsgroße x:

Durchführen einer Polynomdivision:

$$(x^2-k):(x-1)=x+1+\frac{-k+1}{x-1}$$

$-(x^2-x)$

$------$

x

$-(x-1)$

$-----$

$-k+1$

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)-\lim_{x\to\infty}\frac{-k+1}{x-1}="\infty"$$

Der Grenzwert existiert nicht, da $\lim_{x\to\infty}(x+1)$ beliebig groß wird.
Für $x\to\infty$, geht $f(x)\to\infty$.
Für $x\to-\infty$, geht $f(x)\to-\infty$.,

Die Asymptote bestimmt der ganzrationale Anteil nach der Polynomdivision.
Asymptote ist y=x+1.
(Die Funktionswerte würden für $x\to\infty$ den Funktionswerten von y=x+1 sehr nahe kommen.)

4. Verhalten in den Definitionslücken:

Bei x=1 liegt eine Definitionslücke vor. Nur für k=1 wäre x=1 eine Nullstelle des Zählerpolynoms, sonst nicht.
Dennoch ist die Differenz der Vielfachheit der Nullstellen im Zählerpolynom und im Nennerpolynom kleiner 0 (wenn $k\neq 1$), somit liegt hier eine Polstelle vor.
Da die Differenz ungerade ist, liegt an der Stelle x=1 für alle $k\neq 1$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vor. Ein Sonderfall ist k=1, denn:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

Hier ist die Differenz der Vielfachheit der Nullstellen im Zählerpolynom und im Nennerpolynom gleich 0 und somit (nach Definition) lege eine hebbare Definitionslücke vor.
Für alle anderen k liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor.

5. Gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen:

-y-Achsen-Abschnitt: x=0

$$f(0) = \frac{0^2 - k}{0 - 1} = \frac{-k}{-1} = k$$
$S_y(0/k)$

- Nullstellen: $f_k(x) = 0$

$$0 = \frac{x^2 - k}{x - 1}$$
Ein Quotient wird 0, wenn der Zähler 0 wird:
$0 = x^2 - k$

$x^2 = k$

$x_{1,2} = +-\sqrt{k}$

$N_1(\sqrt{k}/0); N_2(-\sqrt{k}/0)$

6. Ableitungen:

$$f_k(x) = \frac{x^2 - k}{x - 1}$$
$$f_k'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 - k)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + k}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + k}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + k}{x^2 - 2x + 1}$$
$$f_k''(x) = \frac{(2x-2)(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 2x + k)(2x - 2)}{(x-1)^4}$$
$$f_k''(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 2x^2 + 4x - 2 - 2x^3 + 2x^2 + 4x^2 - 4x - 2kx + 2k}{(x-1)^4}$$
$$f_k''(x) = \frac{2x - 2xk - 2 + 2k}{(x-1)^4} = \frac{(1-k)2x - 2(1-k)}{(x-1)^4}$$

7. Extrempunkte:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes $f_k'(x) = 0$:

$$0 = \frac{x^2 - 2x + k}{(x-1)^2}$$
Ein Quotient wird 0, wenn der Zähler 0 wird:
$_{1,2} = 1 + -\sqrt{1-k}$

1. Fall:
Für $1-k=0 \to k=1$ liegt eine mögliche Extremstelle bei $x_1 = 1+-\sqrt{1-1} = 1$ vor.

2. Fall:
Für $1-k>0 \to k<1$ liegen zwei mögliche Extremstellen bei $x_{1,2} = 1+-\sqrt{1-k}$ vor.

3. Fall:
Für $1-k<0 \to k>1$ gibt es keine möglichen und somit auch realen Extremstellen, da diese negative Wurzel in der Menge der reellen Zahlen nicht definiert ist.

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes $f_k'(x)=0 \wedge f_k''(x) \neq 0$:

1. Fall:
k=1, mögliche Extremstelle bei x=1

$f''(1) = \frac{(1-k) \bullet 2-2-2k}{(1-1)^4}$. Man würde durch 0 dividieren. Also ist für k=1 die hinreichende Bedingung nicht erfüllt und der Graph hätte keine Extremstellen.

3. Fall:
Der 3. Fall muss mit der hinreichenden Bedingung nicht untersucht werden, da die notwendige Bedingung schon nicht erfüllt ist.

2. Fall:
k<1, mögliche Extremstelle bei $x_{1,2} = 1+-\sqrt{1-k}$
Beispiel für k=-3:

$$x_{1,2} = 1+-\sqrt{4} = 1+-2$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 3$$

$$f''(-1) = \frac{-2+2k-2+2k}{16} = \frac{-4+4k}{16} = \frac{-4-12}{16} -1 < 0 : Maximum$$

$$f''(3) = \frac{6-6k-2+2k}{16} = \frac{4-4k}{16} = \frac{4-12}{16} = -\frac{1}{2} < 0 : Maximum$$

Für positive mögliche Extremstellen erhalten wir immer Maxima. Die Begründung ist sehr einfach. Wähle a als mögliche Extremstelle. Sie größer als 1, also a>1 und k<1.

$$f''(a) = \frac{2a-2-(2a+2)k}{(a-1)^4}$$

Der Nenner ist aufgrund der geraden Potenz immer positiv. 2a-2 ist positiv, da a>1 und 2(2a+2)k wird negativ. Somit wird f''(a) immer negativ und somit lege Maxima vor.

Für negative mögliche Extremstellen gilt:

$$f''(1-\sqrt{1-k}) = \frac{2(1-\sqrt{1-k}) - 2k(1-\sqrt{1-k}) - 2 + 2k}{(1-\sqrt{1-k}-1)^4}$$

$$f''(1-\sqrt{1-k}) = \frac{\sqrt{1-k}(-2+2k)}{(\sqrt{1-k})^4} = \frac{\sqrt{1-k}(-2+2k)}{(1-k)^2}$$

Da k<1 wird der Ausdruck ebenfalls negativ. Somit liegen auch hier Maxima vor.

Berechnung der Extrempunkte:

$$f(1+\sqrt{1-k}) = \frac{(1+\sqrt{1-k})^2 - k}{1+\sqrt{1-k}-1} = \frac{1+2\sqrt{1-k}+1-k-k}{\sqrt{1-k}}$$

$$= \frac{2-2k+2\sqrt{1-k}}{\sqrt{1-k}}$$

$$f(1-\sqrt{1-k}) = \frac{(1-\sqrt{1-k})^2 - k}{1-\sqrt{1-k}-1} = \frac{1-2\sqrt{1-k}+1-k-k}{\sqrt{1-k}}$$

$$= \frac{2-2k-2\sqrt{1-k}}{\sqrt{1-k}}$$

<u>8. Wertebereich:</u>

Für k<1:

$$W = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -\frac{2+2k+2\sqrt{1-k}}{\sqrt{1-k}} und y < \frac{2+2k+2\sqrt{1-k}}{\sqrt{1-k}}\}$$

Für k=1:

$W = \mathbb{R} / \{2\}$

Für k>1:

$W = \mathbb{R}$

Zusatz:

1. Berechnung der Nullstellen f(x)=0:

$$0=\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x-1}$$

Ein Quotient wird 0, wenn der Zähler 0 wird:

$$0=x^2-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}=x^2$$

$$x_{1,2}=+-\frac{1}{2}$$

2. Berechnung der Fläche:

Um die Stammfunktion angeben zu können, führe ich eine Polynomdivision durch:

$$(x^2-\frac{1}{4}):(x-1)=x+1+\frac{\frac{3}{4}}{x-1}$$

$$f(x)=x+1+\frac{\frac{3}{4}}{x-1};F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{4}\bullet\ln(x-1)$$

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(x+1+\frac{\frac{3}{4}}{x-1})dx=[\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{4}\bullet\ln(x-1)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$A=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\bullet\ln(-\frac{1}{2})-(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\bullet\ln(-\frac{3}{2}))$$

$$A=\frac{1}{8}+\frac{4}{8}+\frac{3}{4}\bullet\ln(-\frac{1}{2})-\frac{1}{8}+\frac{4}{8}-\frac{3}{4}\bullet\ln(-\frac{3}{2})$$

$$A=\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{3}{4}\bullet(\ln(-0,5)-\ln(-1,5))$$

$$A=1+\frac{3}{4}\bullet(\ln(\frac{-0,5}{-1,5}))=1+\frac{3}{4}\bullet\ln(0,3)$$

$$A=1-0,824=0,176$$

$$A=0,176FE$$