Mathe LK
Analysisklausur II

1. Bestimme zu den gegebenen Funktionen jeweils die 1. Ableitung f'.
Fasse den Funktionsterm f' soweit wie möglich zusammen.

$a)\ f(x) = \sin x \bullet e^{-x}$

$b)\ f(x) = k \bullet k^{x} - k^{-x}$

$c)\ f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

$d)\ f(x) = \ f(x) = (x+1)^2 + 2^{x+1} + e^{5x^2-2x}$

$e)\ f(x) = \ln(\sqrt{x}) - \ln(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})\ f)\ \ln\dfrac{1}{x^2-4}$

2. Bestimme zur Funktion f eine Stammfunktion F.

$a)\ f(x) = (e^{x} - e^{-x})^2$

$b)\ f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x-1}(x > 1)$

3. Berechne k so, dass das Integral den angegebenen Wert hat.

$a) \int_0^1 (e^{x} + kx)dx = 2$

$b) \int_1^k (\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2})dx = \dfrac{1}{2} + \ln 2$

4. Löse die folgenden Gleichungen.

$a)\ e^{3x^2} = 7$

$b)\ -\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2) = 1$

$c)\ e^{2x} - 6e^{x} + 21 = 13$

5. Beweise die Gültigkeit der folgenden Regel.

Wenn die Funktionen u und x an der Stelle a differenzierbar sind, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = u(x) \bullet v(x)$ an der Stelle a differenzierbar, und es gilt:

$f'(a) = u'(a) \bullet v(a) + u(a) \bullet v'(a)$.

6. Für jedes k $(k \in \mathbb{R}; k > 1)$ ist eine Funktion $f_k(x) = (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} (x \in \mathbb{R})$ und deren 2. Ableitungsfunktion $f_k''(x) = \frac{x}{2k^2} \bullet e^{\frac{1}{k}x} (x \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Untersuche den Graphen der Funktion f_k bezüglich Definitionsbereich, Verhalten für betragsgroße x-Werte, Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkten sowie Wertebereich.

b) Der Graph jeder Funktion f_k besitzt genau einen lokalen Extrempunkte.
Gebe die Gleichung der Funktion g an, auf deren Graph die lokalen Extrempunkte aller Funktionen f_k liegen.

c) Ermittle alle Werte k, für die sich die Graphen der Funktion f_k und der Ableitungsfunktion f'_k nicht schneiden.

d) Durch die Funktion $F_k(x) = \frac{k}{2}(x - 3k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} (x \in \mathbb{R})$ ist eine Stammfunktion der Funktion f_k gegeben. Der Graph der Funktion f_k und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig. Berechne ohne Verwendung von Näherungswerten den Wert k, für den der Inhalt dieser Fläche $\frac{2}{9}(e^2 - 3)$ beträgt.

e) Der Graph jeder Funktion f_k besitzt genau einen Wendepunkte W_k.
Die Wendetangente sei t_k. Die Senkrechte zur Wendetangente im Punkt W_k sei s_k.
Begründe, dass alle Tangenten t_k parallel zueinander verlaufen.
Die Graphen t_k, s_k und die x-Achse begrenzen eine Dreiecksfläche vollständig.
Berechne den Inhalt dieser Fläche.

7. Zeige, dass sich die Graphen der Funktion f mit $f(x) = e^{x+2}$ und g mit $g(x) = 2e - e^{-x}$ an der Stelle x=-1 berühren. Eine Skizze allein ist hier als Nachweis nicht ausreichend. Berechne anschließend den Inhalt der von beiden Funktionsgraphen und der y-Achse eingeschlossenen Fläche.

8. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$.
Welches Rechteck mit achsenparallelen Seiten zwischen dem Graphen von f und den Koordinatenachsen im 1. Quadranten hat maximalen Flächeninhalt?

Lösungen:

1.

$a)\ f(x) = \sin x \bullet e^{-x}$

$\text{Produktregel}:$

$f'(x) = \cos x \bullet e^{-x} - e^{-x} \bullet \sin x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

$b)\ f(x) = k \bullet k^{x} - k^{-x}$

$f'(x) = k \bullet \ln k \bullet k^{x} - \ln(\frac{1}{k}) \bullet (\frac{1}{k})^{x} = \ln k(k^{x+1} + k^{-x})$

$c)\ f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$

$Quotientenregel:$

$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1) - e^{-x}}{(x+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x+1+1)}{(x+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}$

$d)\ f(x) = (x+1)^2 + 2^{x+1} + e^{5x^2-2x} = x^2 + 2x + 1 + 2^{x} \bullet 2 + \frac{e^{5x^2}}{e^{-2x}}$

$f'(x) = 2x + 2 + 2^{x+1} \ln 2 + (10x-2)e^{5x^2-2x}$

$e)\ f(x) = \ln(\sqrt{x}) - \ln(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}) = \ln(\sqrt{x}) - \ln(x^{-\frac{1}{3}})$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt[3]{x} \bullet (-\frac{1}{3}) \bullet x^{-\frac{4}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{2x} + \sqrt[3]{x} \bullet \frac{1}{3} \bullet \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

$f'(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{3} \bullet \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{3} \bullet \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3} \bullet \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{3} \bullet \frac{1}{x} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x}$

$= \frac{1}{x}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{6x}$

$f)\ \ln \frac{1}{x^2-4} = \ln[(x^2-4)^{-1}]$

$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^2-4}} \ldots$

2.

$a)\ f(x) = (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} - 2 + e^{-2x}$

$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}$

$b)\ f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1}(x > 1)$

$f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x-1} = 3x^{-1} - 2x^{-2} + (x-1)^{-1}$

$F(x) = 3\ln|x| + 2 \bullet x^{-1} ...$

3.

$a)\ \int_0^1 (e^x + kx)dx = 2$

$[e^x + \frac{1}{2}kx^2]_0^1 = 2$

$e + \frac{1}{2}k - 1 = 2 | -e + 1$

$\frac{1}{2}k = 3 - e | \bullet 2$

$k = 6 - 2e$

$k = 0,563...$

$b)\ \int_1^k (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})dx = \frac{1}{2} + \ln 2; F(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

$[\ln x - \frac{1}{x}]_1^k = \frac{1}{2} + \ln 2$

$\ln k - \frac{1}{k} - \ln 1 - 1 == \frac{1}{2} + \ln 2$

$\ln k - \frac{1}{k} - 1 == \frac{1}{2} + \ln 2 | +1$

$\ln k - \frac{1}{k} = \frac{3}{2} + \ln 2$

...

4.

$a)\ e^{3x^2} = 7 \,|\, \ln$

$3x^2 = \ln 7 \,|\!: 3$

$x^2 = \frac{1}{3}\ln 7 \,|\, \sqrt{\ldots}$

$x = \sqrt{\frac{1}{3}\ln 7}$

$x = +-0,805$

$b)\ -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = 1 \,|\, \bullet(-1)$

$\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = -1 \,|\, \bullet 2$

$\ln(1-x^2) = -2 \,|\, e$

$1-x^2 = e^{-2} \,|\, -1$

$-x^2 = e^{-2} - 1$

$x^2 = -e^{-2} + 1$

$x = +-0,92987$

$c)\ e^{2x} - 6e^{x} + 21 = 13$

$Substitution: z = e^{x}$

$z^2 - 6z + 21 = 13 \,|\, -13$

$z^2 - 6z - 8 = 0\, p, q - Formel:$

$z_{1,2} = 3 + -\sqrt{9-8}$

$z_1 = 4$

$z_2 = 2$

$Rücksubstitution: e^{x} = z$

$x_1 = \ln 4 = 1,39 \vee x_2 = \ln 2 = 0,63$

5.

<u>Behauptung:</u> $\bullet v(x)$, dann ist $f'(x) = u'(x) \bullet v(x) + u(x) \bullet v'(x)$.

<u>Beweis:</u>

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{u(x) \bullet v(x) - u(a) \bullet v(a)}{x - a}$$

Nun addieren wir 0, das heißt wir addieren und subtrahieren gleichzeitig einen gleichen Term und zwar $-u(a) \bullet v(x) + u(a) \bullet v(x)$:

$$= \lim_{x \to a} \frac{u(x) \bullet v(x) - u(a) \bullet v(x) + u(a) \bullet v(x) - u(a) \bullet v(a)}{x - a}$$
$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{u(x) - u(a)}{x - a} \bullet v(x) + \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \bullet u(a) \right)$$

Im nächsten Schritt wenden wir Grenzwertgesetze an:

$$= \lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \bullet \lim_{x \to a} v(x) + \lim_{x \to a} \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \bullet u(a)$$
$$= u'(a) \bullet v(a) + v'(a) \bullet u(a)$$

q.e.d

Produktregel:

Wenn die Funktionen u und v an der Stelle a differenzierbar sind, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = u(x) \bullet v(x)$ an der Stelle a differenzierbar, und es gilt:
$f'(x) = u'(x) \bullet v(x) + u(x) \bullet v'(x)$

6.

<u>1. Definitionsbereich:</u>

$D = \mathbb{R}$, da ich für x alle Zahlen einsetzen darf.

<u>2. Verhalten für betragsgroße x:</u>

Für $x \to \infty$, geht $f(x) \to \infty$, da

$(\frac{1}{2}x - k) \to \infty$

$e^{\frac{1}{k}x} \to \infty$

$\Rightarrow (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} \to \infty$

Für $x \to -\infty$, geht $f(x) \to 0$, da

$(\frac{1}{2}x - k) \to -\infty$

$e^{\frac{1}{k}x} \to 0$

Da aber $e^{\frac{1}{k}x}$ schneller gegen 0 wächst, als $(\frac{1}{2}x - k)$ gegen – unendlich, strebt der Funktionsterm gegen 0.

$\Rightarrow (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} \to 0$

<u>3. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:</u>

- Schnittpunkte mit der y-Achse: x=0

$f_k(0) = (\frac{1}{2} \bullet 0 - k) \bullet e^{\frac{1}{k} \bullet 0} = -k$

$S_y(0/-k)$

- Nullstellenberechnung: f(x)=0

$0 = (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x}$ Da $e^{\frac{1}{k}x}$ nicht 0 werden kann, beschränke ich mich zur Nullstellenberechnung auf den 1. Faktor, denn ein Produkt wird 0, wenn einer der Faktoren 0 wird.

$0 = (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x}$

$0 = \frac{1}{2}x - k$

$x = 2k$

$N(2k/0)$

4. Ableitungen:

$$f_k(x) = (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} (x \in \mathbb{R})$$
$$f_k\,'(x) = \frac{1}{k} \bullet e^{\frac{1}{k}x} \bullet (\frac{1}{2}x - k) + \frac{1}{2} \bullet e^{\frac{1}{k}x}$$
$$f_k\,'(x) = e^{\frac{1}{k}x}(\frac{1}{2k}x - 1 + \frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{k}x}(\frac{1}{2k}x - \frac{1}{2})$$
$$f_k\,''(x) = \frac{1}{k} \bullet e^{\frac{1}{k}x} \bullet (\frac{1}{2k}x - \frac{1}{2}) + e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{1}{2k}$$
$$f_k\,''(x) = e^{\frac{1}{k}x} \bullet (\frac{1}{2k^2}x - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}) = e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{1}{2k^2}x = e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{x}{2k^2}$$
$$f_k\,'''(x) = \frac{1}{k} \bullet e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{x}{2k^2} + e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{1}{2k^2} = e^{\frac{1}{k}x}(\frac{x}{2k^3} + \frac{1}{2k^2})$$

5. Extrempunkte:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes: f’(x)=0

$$0 = e^{\frac{1}{k}x}(\frac{1}{2k}x - \frac{1}{2}) \mid : e^{\frac{1}{k}x}, zulässig, da e^{\frac{1}{k}x} \neq 0 (Definition)$$
$$0 = \frac{1}{2k}x - \frac{1}{2} \mid + \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2k}x \mid \bullet 2k$$
$$x = k$$
mögliche Extremstelle!

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes: $f\,'(x) = 0 \wedge f\,''(x) \neq 0$:

$$f_k\,''(x) = e^{\frac{1}{k}x} \bullet (\frac{1}{2k^2}x - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k}) = e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{1}{2k^2}x = e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{x}{2k^2}$$
$$f\,''(k) = e^{\frac{1}{k}\bullet k} \bullet \frac{k}{2k^2} = e \bullet \frac{1}{2k} > 0, da k > 1: Minimum$$
$$Berechnung Des Tiefpunktes:$$
$$f_k(x) = (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} (x \in \mathbb{R})$$
$$f(k) = (\frac{1}{2}k - k) \bullet e^{\frac{1}{k}\bullet k} = -\frac{1}{2}ek$$
$$T(k / -\frac{1}{2}ek)$$

6. Wendepunkte:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes: f''(x)=0

$$f_k''(x) = \frac{1}{k} \bullet e^{\frac{1}{k}x} \bullet (\frac{1}{2k}x - \frac{1}{2}) + e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{1}{2k} = e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{x}{2k^2}$$

$$0 = e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{x}{2k^2} \,|: e^{\frac{1}{k}x}, zulässig, da e^{\frac{1}{k}x} \neq 0 (Definition)$$

$$0 = \frac{1}{2k^2}x \,|: \frac{1}{2k^2}, zulässig, da k > 1$$

$$x = 0$$

mögliche Wendestelle!

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{k} \bullet e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{x}{2k^2} + e^{\frac{1}{k}x} \bullet \frac{1}{2k^2} = e^{\frac{1}{k}x}(\frac{x}{2k^3} + \frac{1}{2k^2})$$

$$f_k'''(0) = e^{\frac{1}{k}\bullet 0} \bullet \frac{1}{2k^2} = \frac{1}{2k^2} \neq 0, da k > 1$$

$$Berechnung Des Wendepunktes:$$

$$f_k(x) = (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} (x \in \mathbb{R})$$

$$f_k(0) = -k$$

$$W(0/-k)$$

7. Wertebereich:

$$W = \{y \mid y \geq -\frac{1}{2}ek\} = \mathbb{R}$$

Denn der Tiefpunkt ist von k abhängig, das heißt, dass dieser in Richtung der y-Achse nach unten beliebig verschoben werden, denn k>1, somit kann der Tiefpunkt nur einen negativen y-Wert annehmen und somit ist die Wertemenge die Menge aller reellen Zahlen!

b) Der Tiefpunkt liegt bei $T(k/-\frac{1}{2}ek)$.

Jetzt substituiere ich x=k und erhalten für den y-Wert $y = -\frac{1}{2}ex$. Auf dieser Geradengleichung $y = -\frac{1}{2}ex$ liegen alle Extrempunkte der Funktionsschar. Denn wenn man wieder rücksubstituiert, also k=x, erhält man den angegebenen allgemeinen Tiefpunkt.

$$g(x) = -\frac{1}{2}ex$$

c)

$$f_k(x) = (\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} \; (x \in \mathbb{R})$$

$$f_k'(x) = \frac{1}{k} \bullet e^{\frac{1}{k}x} \bullet (\frac{1}{2}x - k) + \frac{1}{2} \bullet e^{\frac{1}{k}x}$$

$$f_k'(x) = e^{\frac{1}{k}x}(\frac{1}{2k}x - 1 + \frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{k}x}(\frac{1}{2k}x - \frac{1}{2})$$

Nun setze ich die Funktion und ihre Ableitung zunächst gleich, um den x-Wert des Schnittpunktes zu berechnen und um danach Rückschlüsse ziehen zu können, für welche k es keinen Schnittpunkt gibt.

$$(\frac{1}{2}x - k) \bullet e^{\frac{1}{k}x} = e^{\frac{1}{k}x}(\frac{1}{2k}x - \frac{1}{2}) \,|: e^{\frac{1}{k}x}, zulässig, da e^{\frac{1}{k}x} \neq 0 (Definition)$$

$$\frac{1}{2}x - k = \frac{1}{2k}x - \frac{1}{2} \,| + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$-k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2k}x - \frac{1}{2}x$$

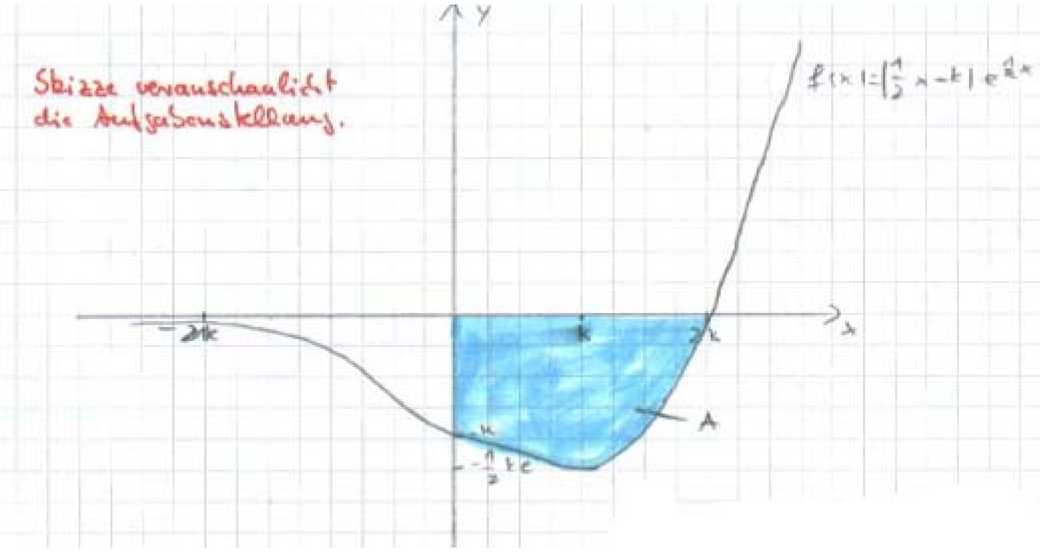
$$-k + \frac{1}{2} = x(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2}) \,|: (\frac{1}{2k} - \frac{1}{2})$$

$$x = \frac{-k + \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2})}$$

$x = \dfrac{-k + \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2})}$ ist für die Werte k=0 und k=1 nicht definiert, da man sonst durch 0 dividieren würde.

Da aber nach Aufgabenstellung k>1, folgt, dass es keine Werte für k gibt, für die es keine Schnittpunkte der Funktion und derer Ableitung gibt.

d)



<u>1. Berechnung der Nullstellen:</u>

Analog zur Nullstellenberechnung in Aufgabe 6a)
N(0/2k)

$$A = \left| \int_0^{2k} \left(\left(\frac{1}{2}x - k\right) \bullet e^{\frac{1}{k}x}\right) dx \right| = \frac{2}{9}(e^2 - 3)$$

$$\left|\left[\frac{k}{2}(x - 3k) \bullet e^{\frac{1}{k}x}\right]_0^{2k}\right| = \frac{2}{9}(e^2 - 3)$$

$$\left|\frac{k}{2}(2k - 3k) \bullet e^{\frac{1}{k}\bullet 2k} - \left(\frac{k}{2} \bullet (-3k)\right) = \frac{2}{9}(e^2 - 3)\right.$$

$$\left|\frac{k^2}{2}(-e^2 + 3)\right| = \frac{2}{9}(e^2 - 3)$$

$$\left|-\frac{k^2}{2}(e^2 - 3)\right| = \frac{2}{9}(e^2 - 3)$$

$$\left|-\frac{k^2}{2}\right|(e^2 - 3) = \frac{2}{9}(e^2 - 3) \;|:(e^2 - 3)$$

$$\left|-\frac{k^2}{2}\right| = \frac{2}{9}$$

$$\frac{k^2}{2} = \frac{2}{9}$$

$$k^2 = \frac{4}{9}$$

$$k = +-\frac{2}{3}$$

Da aber k>1 nach Aufgabenstellung, folgt, dass eine Fläche von $\frac{2}{9}(e^2 - 3)$ dieser Funktionsschar mit den Koordinatenachsen nicht begrenzt wird.

e) Nach 6a) war W(0/-k)

Die Steigung der Wendetangente erhält man durch Einsetzen des x-Wertes in die 1. Ableitung:

$m = f'(0) = -\frac{1}{2}$

Berechnung des y-Achsenabschnittes durch die Geradengleichung:
y=mx+b

$-k = -\frac{1}{2} \bullet 0 + b$

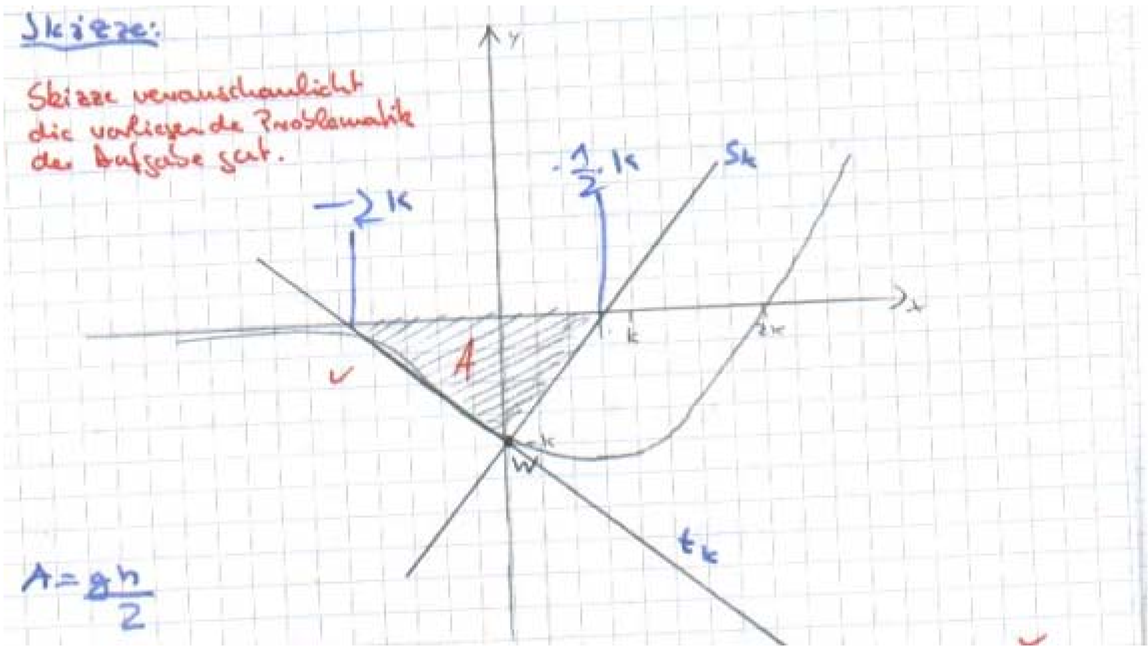
$b = -k$

$t_k(x) = -\frac{1}{2}x - k$

Alle Wendetagenten t_k verlaufen parallel zu einander, da alle die gleiche Steigung $m = -\frac{1}{2}$ haben.

Bestimmung der Gleichung von s_k:
Es gilt: $m_k \bullet m_s = -1$.
Daraus folgt für die Gleichung bzw. Steigung der Normalen:
$m_s=2$
Berechnung des y-Achsenabschnittes durch die Geradengleichung:
y=mx+b

$s_k(x) = 2x - k$



Zur Berechnung der Dreiecksfläche sind nur die Nullstellen von t_k und s_k nötig:

$$t_k(x) = 0$$
$$0 = -\frac{1}{2}x - k$$
$$x = -2k$$
$$s_k(x) = 0$$
$$0 = 2x - k$$
$$x = \frac{1}{2}k$$

Durch Einsetzen in die Formel zur Berechnung der Dreiecksfläche ergibt durch

$$g = 2k + \frac{1}{2}k = 2,5k$$
$$h = k$$

$$A = \frac{2,5k \bullet k}{2} = 1,25k^2$$

7.
a)

$$f(x) = e^{x+2} und g(x) = 2e - e^{-x}$$

Gemeinsamer Berührpunkt bei x=-1:

$$f(x) = e^{x+2};\ f\,'(x) = e^{x+2};\ f\,''(x) = e^{x+2}$$
$$g(x) = 2e - e^{-x};\ g\,'(x) = e^{-x};\ g\,''(x) = -e^{-x}$$

<u>1. Vorraussetzung für einen Berührpunkt:</u>
Die beiden Funktionen stimmen an der Stelle x=-1 in ihren Funktionswerten überein.

$$f(-1) = e$$
$$g(-1) = 2e - e = e$$

Bedingung erfüllt!

<u>2. Vorraussetzung für einen Berührpunkt:</u>
Die beiden Funktion haben an der Stelle x=-1 die gleiche Steigung.

$$f\,'(-1) = e$$
$$g\,'(-1) = e^1 = e$$

Bedingung erfüllt!

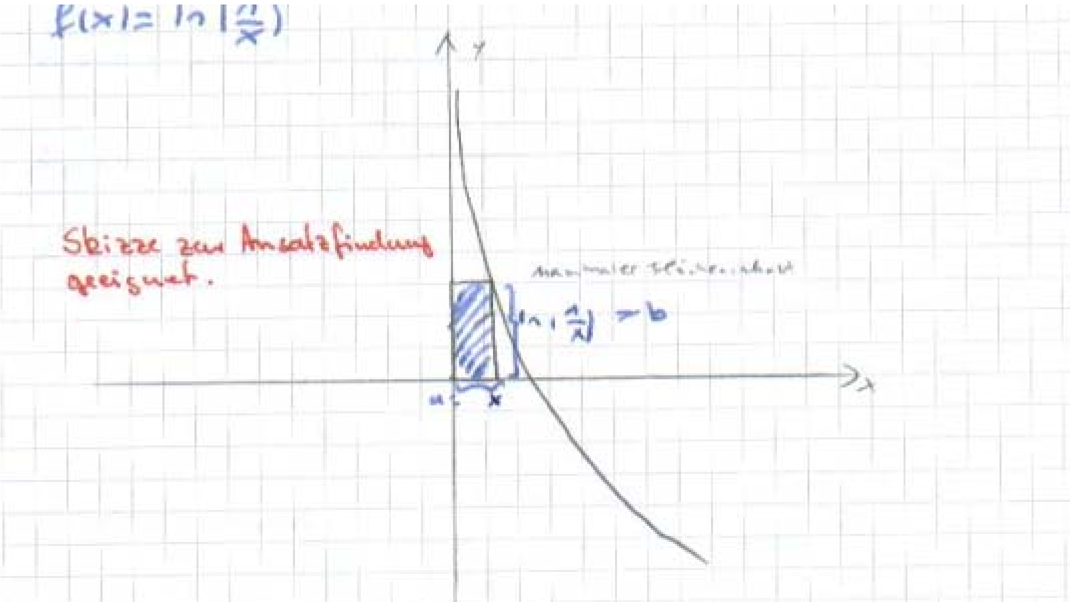
<u>3. Vorraussetzung für einen Berührpunkt:</u>
Die Funktionen sind anders gekrümmt. Um dies zu überprüfen, sieht man die 2. Ableitung zu Hilfe.

Wegen f’’(x)>0 und g’’(x)<0 für alle x sind die Funktionsgraphen unterschiedlich gekrümmt. Insgesamt folgt, dass die Graphen von f und g sich im Punkt (-1/e) berühren.
b)

$$A=\int_{-1}^{0} f-g=\int_{-1}^{0}(e^{x+2}-2e+e^{-x})dx=[e^{x+2}-2ex-e^{-x}]_{-1}^{0}$$
$$=(e^2-1)-e-2e+e=e^2-2e-1=0,95$$

8.

$$f(x)=\ln(\frac{1}{x})=\ln(x^{-1})=-\ln x$$



Aus der Zeichnung ergibt sich für den Flächeninhalt $A=x\bullet(-\ln x)=-x\bullet\ln x$.
Dies betrachte ich als Funktion und bestimme somit mit Hilfe notwendiger und hinreichender Bedingung die möglichen Extremstellen.

$$A(x)=-x\bullet\ln x$$
$$A'(x)=-\ln x-x\bullet\frac{1}{x}=-\ln x-1$$
$$A''(x)=-\frac{1}{x}$$

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes: $A'(x)=0$

$$0=-\ln x-1 \mid +1$$
$$1=-\ln x \mid \bullet(-1)$$
$$\ln x=-1 \mid e$$
$$x=e^{-1}=0,37$$
mögliche Extremstelle!

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes: $A'(x) = 0 \wedge A''(x) \neq 0$

$A''(e^{-1}) = -\frac{1}{e^{-1}} = -e < 0 : \mathit{Maximum}$

Berechnung des größtmöglichen Flächeninhalts:

$x = e^{-1}; A(x) = A(e^{-1}) = \ln(\frac{1}{e^{-1}}) = \ln e = 1$

$A = e^{-1} \bullet 1 = e^{-1} = 0,37$