Mathe LK Klasusur
Analytische Geometrie und Lineare Algebra II

1. Gegeben sind die Punkte $A(5;1;-2); B(2;0;-2)$ und $C(0;2;2)$ sowie die Ebene $E_2: 2x - y + t = 3$ und der Punkt $P(-3;3;-2)$.

a) Durch die Punkte A, B und C wird eindeutig eine Ebene E_1 festgelegt. Bestimme eine Parametergleichung für E_1 und überführe diese dann unter Verwendung von Determinanten in eine entsprechende Normalenform. [Kontrolle: E_1:x-3y+2z=-2]

b) Bestimme durch geeignete Berechnungen eine Parametergleichung der Schnittgeraden von E_1 und E_2.

c) Berechne die Größe des Schnittwinkels zwischen diesen beiden Ebenen.

d) Gebe die Gleichung der Schnittgeraden in Plückerform an.

e) Berechne die Abstände des Punktes P von E_1 und von der Schnittgeraden.

2. Gegeben sind die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (r, s \in \mathbb{R})$ und die Ebenenschar $F_a: \begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ -2a \end{pmatrix} \bullet \vec{x} = 2 (a \in \mathbb{R})$.

a) Zeige, dass jede Ebene F_a der Ebenschar auf der Ebene E senkrecht steht.

b) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit zwei Ebenen der Schar senkrecht aufeinander stehen?

c) Für welchen Parameter a wird der Abstand des Ursprungs von einer Ebene der Schar extremal? Berechne den extremalen Abstand auch.

d) Zeige, dass es in der Schar keine parallelen Ebenen gibt und bestimme dann die Gleichung der Schnittgeraden aller Scharebenen.

3. Als Besucherplattform für die Beobachtung von Vögeln am Steinhuder Meer wird ein Holzturm auf einer ebenen Fläche errichtet. Er besteht aus einem Quader mit aufgesetzter gerader Pyramide.

Die Koordinaten folgender Punkte seien gegeben.
A(9;0;0), B(9;12;0), C(0;12;0) und E(9;0;20)
Eine Einheit im Koordinatensystem betrage einen Meter in der Realität.
Die Höhe der Pyramide betrage fünf Meter.

a) Gebe die Koordinaten der Punkte F, G und H an und berechne die Koordinaten des Punktes S.

b) Berechne die Größe des Winkels, den die Dachkante SG mit der Grundfläche der Pyramide einschließt.

c) Die Gerade g durch die Dachkante $\overline{SF}$ und die Gerade h durch die Diagonale $\overline{EG}$ verlaufen windschief zu einander. Berechne den Abstand der beiden Geraden.

d) Auf der Spitze der Pyramide steht eine $3m$ hohe Antenne. Die Richtung des Sonnenlichts werde durch den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben. Untersuche, ob der Schatten der Antenne vollständig in der Dachfläche SFG liegt.

e) In der Seitenfläche $BCGF$ liegt ein ebener Reflektor. Außerhalb des Gebäudes befindet sich einen halben Meter über dem Boden ein Scheinwerfer $L(12;16;0,5)$.
Er ist so abgeschirmt, dass der von ihm ausgehende Lichtstrahl den Reflektor nur im Punkt $R(8;12;1)$ trifft.
Der reflektierte Lichtstrahl verläuft unter anderem durch den Punkt P.
i) Berechne die Koordinaten von P für den Fall, dass $|\overrightarrow{LR}| = |\overrightarrow{RP}|$.
ii) Auf einem Gartenweg, der $8m$ vom Gebäude entfernt und parallel zur Gebäudekante $\overline{BC}$ verläuft, geht ein Mensch, dessen Abstände $1,50m$ beträgt.
Untersuche, ob dieser Mensch vom reflektierten Licht geblendet werden kann.

4. Beweise vektoriell den Kosinussatz der Trigonometrie: $c^2 = A^2 + b^2 - 2ab \bullet \cos\gamma$.

<u>Lösungen:</u>

1.

$a) A(5;1;-2); B(2;0;-2); C(0;2;2)$

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}] + r[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}]$$

$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ Überführung der Parameterform in Normalenform mit Hilfe von Determinanten. Es gilt: $(\vec{x};\vec{a};\vec{b}) = (\overrightarrow{x_0};\vec{a};\vec{b})$.

Die Anwendung der Regel nach Sarrus liefert:

$-4x - 3z - 5z + 12y = -20 + 6 + 10 + 12$

$-4x - 8z + 12y = 8$

$x - 3y + 2z = -2$

$b) \varepsilon_1: x - 3y + 2z = -2; \varepsilon_2: 2x - y + z = 3$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden erhalte ich, indem ich das Kreuzprodukt der beiden Normalenvektoren der beiden Ebenen bilde. Es gilt also: $\vec{a} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 4-1 \\ -1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Für den Stützvektor wird der Ortsvektor eines Punktes gesucht, der gleichzeitig in beiden Ebenen liegt, der also folgendes LGS erfüllt:

$I. x - 3y + 2z = -2$

$II. 2x - y + z = 3$

Lösen des LGS liefert: $-3x - y = -8$

Da das LGS nicht eindeutig lösbar ist, da wir drei Variablen, aber nur zwei Gleichungen haben, wähle ich mir eine Variable frei: $x = 2$. Dann folgt direkt:

$-6 - y = -8 \Leftrightarrow y = 2$ Setze nun $x = y = 2$ in Gleichung I ein und erhalten damit

$2 - 6 + 2z = -2 \Leftrightarrow z = 1$.

Eine Gleichung einer Schnittgeraden lautet also:

$$g_s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$c)$ Der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen berechnet sich durch:

$\cos\alpha = |\frac{\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}|$. Einsetzen liefert:

$$\cos\alpha = |\frac{\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{14} \bullet \sqrt{6}}| = \frac{7}{\sqrt{84}} \to \alpha = 40,2°$$

$d)$Allgemeine Plückerform lautet:

$(\vec{x} - \overrightarrow{x_0}) \times \vec{a} = \vec{0}$ bzw.$\vec{x} \times \vec{a} = \overrightarrow{x_0} \times \vec{a}$.

Einsetzen liefert:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5x-3z\\-z-5x\\3x+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-11\\8\end{pmatrix}.$$

$e)P(-3;3;-2)$

Der Abstand eines Punktes zu einer Ebene wird mit Hilfe des Projektionsverfahren berechnet. Es gilt: $d = |(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_0}) \bullet \overrightarrow{e_n}|$. Einsetzen liefert:

$$d = |[\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}] \bullet \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix}-5\\3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{14}}| = |\frac{-14}{\sqrt{14}}| = \sqrt{14}$$

Der Abstand des Punktes zur Ebene beträgt $d = \sqrt{14}LE$.

Der Abstand eines Punktes von einer Geraden im R_3 wird mit Hilfe der Plückerform der Geradengleichung bestimmt.

$d = |(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_0}) \times \overrightarrow{e_a}|$. Einsetzen liefert:

$$d = |[\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}] \times \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix}-5\\1\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix} \bullet \frac{1}{\sqrt{35}}| = 5,797$$

Der Abstand des Punktes zur Gerade beträgt daher ungefähr $5,8LE$.

2.

$a)\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; F_a : \begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ -2a \end{pmatrix} \bullet \vec{x} = 2$

Zwei Ebenen sind senkrecht zu einander, wenn für ihre Normalenvektoren gilt: $\overrightarrow{n_E} \bullet \overrightarrow{n_{F_a}} = 0$. Damit dies überprüft werden kann, muss die Gleichung der Ebene E in Normalenform überführt werden:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Ebene E hat also die Normalengleichung mit $\vec{x} \bullet \vec{n} = \overrightarrow{x_0} \bullet \vec{n}$:

$\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$. Prüfung, ob $E \perp F_a$:

$$\begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 - a + 1 - a + 2a = 0 w.A.$$

Also ist jede Ebene der Schar F_a senkrecht zu E.

$b)$ Zwei Ebenen der Schar sind senkrecht zu einander, wenn $\overrightarrow{n_{F_a}} \bullet \overrightarrow{n_{F_b}} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ -2a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1+b \\ 1-b \\ -2b \end{pmatrix} = (1+a)(1+b) + (1-a)(1-b) + (-2a)(-2b) = 0$$

$$1 + b + a + ab + 1 - b - a + ab + 4ab = 0$$

$$6ab = -2$$

$ab = -\frac{1}{3}$ Zwei Ebenen der Schar sind also senkrecht, wenn gilt: $ab = -\frac{1}{3}$.

c) Den Abstand einer Ebene vom Ursprung kann man an der Hesseform einer Ebene gleichzeitig ablesen:

NF von $F_a : F_a : \begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ -2a \end{pmatrix} \bullet \vec{x} = 2$

HNF von $F_a : F_a : \dfrac{(1+a)x+(1-a)y-2az}{\sqrt{(1+a)^2+(1-a)^2+4a^2}}$

$\dfrac{2}{\sqrt{(1+a)^2+(1-a)^2+4a^2}}$

$d = \dfrac{2}{\sqrt{6a^2+2}}$ Der Abstand wird für $a=0$ maximal, da für $a=0$ der Nennerterm $\sqrt{6a^2+2}$ minimal und damit der Abstand maximal wird. Der maximale Abstand ist dann $d=\sqrt{2}$.

Der minimale Abstand kann nicht exakt, sondern nur als Grenzwert angegeben werden:

$d_{\min} = \lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{6a^2+2}} = 0LE.$

$d)$ Zwei Ebenen der Schar sind parallel genau dann, wenn $\overrightarrow{n_a} \times \overrightarrow{n_b} = \vec{0}$.

Es muss also gelten: $a \neq b$.

Prüfung: $\begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ -2a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1+b \\ 1-b \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)(-b)-(2a)(1-b) \\ (-2a)(1+b)-(1+a)(-2b) \\ (1+a)(1-b)-(1-a)(1+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b+2a \\ -2a+2b \\ -2b+2a \end{pmatrix} = \vec{0}.$

Das zugehörige LGS hat nur dann eine Lösung, wenn $a = b$. Da nach Vorraussetzung aber $a \neq b$ gilt, gibt es keine parallelen Ebenen der Schar.

Berechnung der Schnittgeraden: Ein Richtungsvektor der Schnittgeraden wurde bereits in 2a) ermittelt, da $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \perp \mathrm{F_a}$.

Ein Punkt, der in allen Ebenen der Schar liegt, ist $P(1;1;0)$

Nachweis $P \in F_a$:

$$\begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ -2a \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1+a+1-a+0 = 2 w.A.$$

Die Schnittgerade aller Ebenen lautet also:

$$g_s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.

$a) F(9;12;20); G(0;12;20); H(0;0;20)$

$$\overrightarrow{0S} = \overrightarrow{0H} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$S(4,5;6;25)$

Die Koordinaten des Punktes S lauten also: $S(4,5;6;25)$.

$b)$ Die Geradengleichung durch die Punkte S und G lautet:

$$g_s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 25 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4,5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung durch die Punkte A, E und G lautet:

$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ Man erkennt, dass $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und es folgt:

$$E : \vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 20$$

Der Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene berechnet sich mit:

$$\sin\alpha = \left| \frac{\vec{a} \bullet \vec{n}}{|\vec{a}||\vec{n}|} \right|:$$

Einsetzen liefert:

$$\sin\alpha = \left| \frac{\begin{pmatrix} -4,5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{81,25}} \right| = \frac{5}{\sqrt{81,25}} \rightarrow \alpha = 33,69°$$

Der Winkel zwischen Dachkante und Pyramidengrundfläche beträgt ungefähr $33,69°$.

$c)$

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}4,5\\6\\25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4,5\\6\\-5\end{pmatrix};h:\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\0\\20\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-9\\12\\0\end{pmatrix}$$

Der Abstand wird berechnet mit Hilfe der Formel $d=|(\overrightarrow{x_1}-\overrightarrow{x_0})\bullet\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}|$

Nebenrechnungen:

$$\overrightarrow{x_1}-\overrightarrow{x_0}=\begin{pmatrix}4,5\\6\\25\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9\\0\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4,5\\6\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}4,5\\6\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-9\\12\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+60\\45-0\\54+54\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\45\\108\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}20\\15\\36\end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{3600+2025+108^2}=\sqrt{17289}$$

Einsetzen liefert:

$$d=|\begin{pmatrix}-4,5\\6\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}60\\45\\108\end{pmatrix}\bullet\frac{1}{\sqrt{17289}}|=\frac{540}{\sqrt{17289}}=4,1068LE$$

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden beträgt ungefähr $4,11LE$.

d) Die Antennenspitze kann mit T bezeichnet werden. T hat die Koordinaten $(4,5;6;28)$, da sich T genau 3 Einheiten in z-Richtung über S befindet.

Die Gerade, die den Schattenverlauf der Antennenspitze beschreibt, hat die Gleichung

$$g_A : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 28 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufstellen der Ebenengleichung durch die Punkte S, F, G:

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 25 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4,5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Überführen der Ebenengleichung in Normalenform:

$$\begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4,5 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 45 \\ 54 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Normalenform der Ebene lautet nach $\vec{x} \bullet \vec{n} = \overrightarrow{x_0} \bullet \vec{n}$:

$$\varepsilon : \vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 180$$

Schnittberechnung der Geraden und der Ebene liefert durch Einsetzen von g in die Ebene:

$$5(6+3r) + 6(28-3r) = 180$$

$$30 + 15r + 168 - 18r = 180$$

$$r = 6$$

Der Schnittpunkt lautet damit: $\overrightarrow{0S_1} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6 \\ 28 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,5 \\ 24 \\ 10 \end{pmatrix}.$

Man sieht zum Beispiel an der z-Koordinate des Schnittpunktes des Geraden mit der Ebene, dass der Schnittpunkt der Antenne nicht vollständig in der Dachfläche SFG liegen kann, da die z-Koordinaten aller Punkt dieser Fläche zwischen 20 und 25 liegen. Da di z-Koordinate des Schnittpunktes aber 10 ist, trifft der Schatten der Antennenspitze die Ebene außerhalb der Dachfläche SFG.

e)
|i|

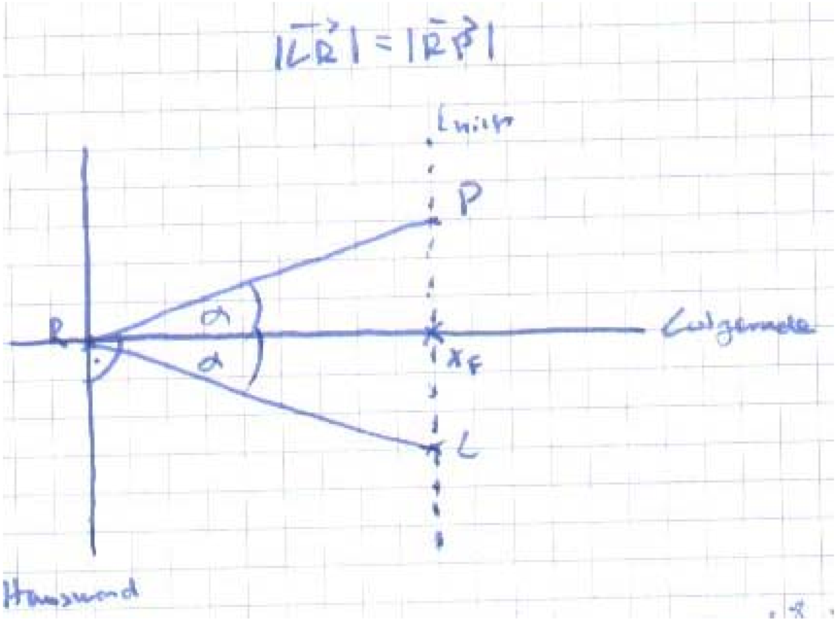

Abb. 1 Skizze zur Lösungsfindung

Die Lotgerade wird beschrieben durch $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\12\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Die Berechnung der Koordinaten x_F erfolgt mit Hilfe der Hilfsebene, wobei $\varepsilon_{hilfs}\perp g_{Lot}$ und $L\in\varepsilon_{hilfs}$.

$\varepsilon_{hilfs}:\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\bullet\vec{x}=16$

Die Koordinaten von x_F ergeben sich nun als Schnittpunkt von $\varepsilon_{hilfs}\wedge g_{Lot}$:

$1\bullet(12+r)=16\Leftrightarrow r=4$

Setze nun $r=4$ in die Gerade ein, um Lotfußpunkt zu berechnen:

$\overrightarrow{0X_F}=\begin{pmatrix}8\\12\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\16\\1\end{pmatrix}$. Weiterhin folgt:

$\overrightarrow{0P}=\overrightarrow{0C}+2\overrightarrow{LX_F}=\begin{pmatrix}12\\16\\0,5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-4\\0\\0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\16\\1,5\end{pmatrix}$

Der Punkt P hat also die Koordinaten $P(4;16;1,5)$.

|ii|

Die Gerade, die die Augenhöhe des Menschen beschreibt, hat die Gleichung

$g_A : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Gerade, die den reflektierenden Lichtstrahl beschreibt, hat

die Gleichung $g_L : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

Der Mensch wird geblendet, wenn sich die beiden Geraden schneiden. Prüfung auf Schnittpunkt durch Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile liefert $s = 2$, die dritte Zeile liefert aber $s = 1$.

Der Parameter s ist also nicht eindeutig bestimmt, also schneiden sich die beiden Geraden nicht, also wird der Mensch nicht geblendet.

4.

Behauptung: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \bullet \cos\gamma$.

Beweis:

Das Skalarprodukt ist definiert als: $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma \Leftrightarrow \cos\gamma = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$(1).

Nun drücke ich die Seiten $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{c}|$ mit Hilfe von der Koordinatendarstellung aus:

$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$; Damit gilt:

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = (a_1{}^2 - 2a_1b_1 + b_1{}^2) + (a_2{}^2 - 2a_2b_2 + b_2{}^2) + (a_3{}^2 - 2a_3b_3 + b_3{}^2)$

$= (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2) + (b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \bullet \vec{b})$

Aus (1) folgt:

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \bullet \vec{b})|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma$

und mit $|\vec{a}| = a \wedge |\vec{b}| = b$:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \bullet \cos\gamma$ $\qquad$ $q.e.d.$