Hardcore-Übungsschulaufgabe aus der Mathematik, erstellt von Patrick Winter

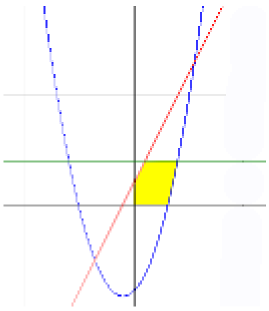
(Die Aufgaben sind nach aufsteigender Schwierigkeit angeordnet)

1. Schreiben Sie $F(x)=\int_0^x \left(\left|t^3-3\cdot t^2+3\cdot t-1\right|\right)\cdot dt$ als integralfreie, abschnittsweise definierte Funktion.

2. Schreiben Sie die Funktion $g(x)=x^2-\frac{1}{x}$ als Integralfunktion mit geeigneter unterer Grenze, geben Sie die Definitionsmenge dieser Integralfunktion an und grenzen Sie sie von der Definitionsmenge von g ab.

3. Bestimmen Sie v so, dass für jede quadratische Funktion f gilt:
$f\left(\int_0^{-v} f(t)\cdot dt+\int_0^{v} f(t)\cdot dt\right)=0$. Begründen Sie anhand der Definitionsvorrausetzungen der Parameter von f, warum das Ergebnis keine praktische Bedeutung hat.

4.



Ein Flächenstück wird von der quadratischen Funktion f, ihren beiden Ableitungen und den beiden Koordinatenachsen begrenzt. Berechnen Sie (ohne Auflösung der entstehenden Integrale) allgemein den Flächeninhalt $A(f(x))$ und leiten Sie daraus alle Vorraussetzungen der Parameter von f ab, die erfüllt werden müssen, damit ein so begrenztes Flächenstück entsteht.

5. Berechnen Sie das Integral $\int_{-a}^{a}\left(\left|\sum_{i=0}^{n} x^{2\cdot i+1}\right|\right)\cdot dx$ zunächst allgemein und danach konkret für $n=1$.

6. Beweisen Sie, dass $\int \frac{1}{(\cos(x))^2}\cdot dx=\tan(x)$ gilt und lösen Sie mit dieser Integrationsregel das Integral $\int_0^{\pi} a\cdot(\tan(x))^2\cdot dx$. Begründen Sie, warum das Ergebnis unbrauchbar ist.

7. Bestimmen Sie die Funktion $v(f(x))$ so, dass folgende Gleichung für Geraden der Form $f(x)=m\cdot x+a$ gilt: $\int_{v(f(x))}^{x} f(t)\cdot dt=f(x)$.

PW

Lösung der Hardcore-Schulaufgabe, erstellt von Patrick Winter

1. Aufgabe

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{1}{4} & \text{für } x<1 \\ \frac{(x-1)^4}{4}+\frac{1}{4} & \text{für } x\geq 1 \end{cases}$$

2. Aufgabe

$$F(x)=\int_1^x\left(2\cdot t+\frac{1}{t^2}\right)\cdot dt$$

$$D_{g(x)}=R\setminus\{0\};D_{F(x)}=\left]0;\infty\right]$$

3. Aufgabe

$$v=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a\cdot b}}$$

$$\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}\geq b\Rightarrow 4\cdot a\cdot c=0\Rightarrow c=0$$

4. Aufgabe

$$A(f(x))=\int_0^{\frac{2\cdot a-b}{2\cdot a}}f'(x)\cdot dx+\int_{\frac{2\cdot a-b}{2\cdot a}}^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}f''(x)\cdot dx+\int_{\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot(c-2\cdot a)}}{2\cdot a}}\left(f''(x)-f(x)\right)\cdot dx$$

$$a>0$$

$$2\cdot a<\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}<\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot(c-2\cdot a)}$$

5. Aufgabe

$$n=n:\ 2\cdot\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{a^{2\cdot i+2}}{2\cdot i+2}\right)$$

$$n=1:\quad a^2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a^2+1\right)$$

6. Aufgabe

$$(\tan(x))'=\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=\frac{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}=1+(\tan(x))^2=\frac{1}{(\cos(x))^2}$$

$$\int_0^{\pi}a\cdot(\tan(x))^2\cdot dx=-\pi$$

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)};\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;0<\frac{\pi}{2}<\pi$$

7. Aufgabe

$$v(f(x))=\frac{-a\pm\sqrt{(f(x))^2-2\cdot f'(x)\cdot f(x)}}{f'(x)}$$