# Zylinder - Volumen und Oberfläche

1. Bei einem geraden Kreiszylinder sind der Radius $r = 25$ mm und der Inhalt der Oberfläche $O = 375$ cm$^2$ gegeben. Leiten Sie Formeln für

   a) die Mantelfläche $M$ b) die Höhe $h$ c) das Volumen $V$

   jeweils in Abhängigkeit von $r$ und $O$ her und berechnen Sie die Zahlenwerte.

*Lösung:* i) $M = O - 2\pi r^2 = 336$ cm$^2$
ii) $h = \frac{O-2\pi r^2}{2\pi r} = 21.4$ cm
iii) $V = \frac{r}{2}(O - 2\pi r^2) = 420\text{cm}^3$

2. Von einem geraden Kreiszylinder kennt man den Oberflächeninhalt $O = 750\,\text{cm}^2$ und den Mantelflächeninhalt $M = 450\,\text{cm}^2$.
   Man berechne Radius $r$, Höhe $h$ und Volumen $V$ des Zylinders! (Rundung jeweils auf 1 Dezimale!)

*Lösung:* $r = 6{,}9\,cm;\ h = 10{,}4\,cm;\ V = 1555{,}5\,cm^3$

3. Eine außen und innen zylinderförmige Glasvase hat einen Innenradius von 4,0 cm und eine Gesamthöhe von 32,0 cm. Der Boden ist 1,0 cm dick.

   (a) Die Vase sei zur Hälfte mit Wasser gefüllt. Wie groß ist der Inhalt der vom Wasser benetzten Glasfläche? Rundung auf cm$^2$ genau!

   (b) Wie groß müsste die Wanddicke der Vase sein, damit der Glaskörper bei gleichbleibender Bodendicke von 1,0 cm dasselbe Volumen hat wie der Hohlraum der Vase? Rundung auf 1 Dezimale!

*Lösung:* (a): $440\,cm^2$ $(b):\ 1{,}6\,cm$

4. Bestimmen Sie die Masse $m$ eines Kupferrohrs, das die Länge $l = 1\,\text{m}$, den Außendurchmesser $2r = 4\,\text{cm}$ und die Wandstärke $d = 3\,\text{mm}$ hat. Die Dichte von Kupfer ist $\varrho = 8{,}9\frac{g}{cm^3}$.

   (a) Leiten Sie zunächst einen Ausdruck her, der $m$ durch die Größen $l, r, d, \varrho$ ausdrückt.

   (b) Berechen Sie den Wert dieses Ausdrucks für die angegebenen Werte der Größen $l, r, d, \varrho$ mit dem Taschenrechner.

*Lösung:* (a) $m = \pi\varrho ld(2r - d)$ (b) $m = 3103{,}6g \approx 3{,}1kg$

5. Wir betrachten einen geraden Kreiszylinder mit dem Volumen $V = \dfrac{1}{\sqrt{8\,\pi}}\,\mathrm{m}^3$, in dem die Höhe das $k$-fache des Grundkreisradiuses ist ($h = k\,r$).

   (a) Drücken Sie $r$ durch $V$ und $k$ aus!

   (b) Beweisen Sie, unter Nutzung des Ergebnisses von (a), für die Oberfläche des Zylinders die Formel
   $$A_0 = \frac{1+k}{\sqrt[3]{k^2}}\,\mathrm{m}^2\ .$$

   (c) Durch Probieren mit dem Taschenrechner ist herauszufinden, für welchen Wert von $k$ die Oberfläche $A_0$ den kleinstmöglichen Wert annimmt! Erstellen sie ein genaues Protokoll der Rechnungen in Form einer Wertetabelle mit geschickt gewählten $k$-Werten.

*Lösung:* (a) $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{k\,\pi}}$
(c) $A_0$ minimal für $k = 2$, d.h. $h = 2\,r$ ; $A_{0min} = 1{,}889881575\,\mathrm{m}^2$

6. Ein Würfel aus Kork ($\varrho_K = 0{,}2\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) wird senkrecht zu einer Seitenfläche zylindrisch durchbohrt. In diese Bohrung wird ein Aluminiumzylinder ($\varrho_{Al} = 2{,}7\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) gleicher Größe gesteckt. Die Kantenlänge $a$ des Würfels beträgt 30 cm.
   Wie groß muss der Radius $r$ der Bohrung sein, damit der Körper im Wasser ($\varrho_W = 1{,}0\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$) schwebt? Berechnen Sie zunächst allgemein den Radius $r$ der Bohrung in Abhängigkeit von der Kantenlänge $a$ des Würfels und setzen Sie erst dann die gegebenen Werte ein!

*Lösung:* $r = \sqrt{\frac{\varrho_W - \varrho_K}{(\varrho_{Al} - \varrho_K)\cdot\pi}} \cdot a = 9{,}6\,cm$; Auftriebsgesetz von Archimedes verwenden!

7. Bei einem Brunnen liefert eine Röhre mit einem Innendurchmesser von 2,6 cm in der Minute 20 Liter Wasser. Wie groß ist die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers? Geben Sie das Ergebnis in der Einheit $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ an!

*Lösung:* $0{,}63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

8. Die Höhe eines Zylinders, dessen Oberfläche $12\pi\,\mathrm{cm}^2$ beträgt, ist um 1 cm größer als sein Radius. Wie groß ist sein Volumen?

*Lösung:* $\frac{45}{8}\pi\,cm^3$

9. Gegeben ist ein Rohr mit Länge $l$, Außendurchmesser $d_a$ und Innendurchmesser $d_i$.

   (a) Berechnen Sie das Volumen des massiven Teils des Rohres in Abhängigkeit von den gegebenen Größen!

(b) Zeigen Sie, dass für die Oberfläche $S$ des Rohres gilt:

$$S = \frac{\pi}{2} \cdot (d_a + d_i) \cdot (2l + d_a - d_i)$$

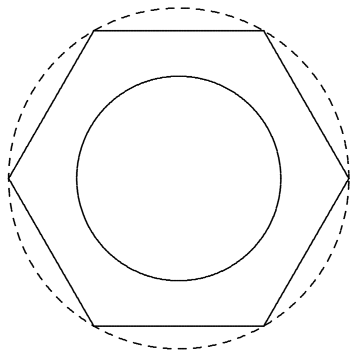
(c) Berechnen Sie $S$ speziell für $l = 1{,}5\,\text{m}$; $d_a = 50\,\text{cm}$; $d_i = 48\,\text{cm}$ und geben Sie das Ergebnis sinnvoll gerundet in der Einheit $\text{m}^2$ an!

*Lösung:* (a) $V = \frac{\pi}{4} \cdot l \cdot (d_a^2 - d_i^2)$ (c) $S \approx 4{,}6\,m^2$

10. Einem Zylinder (Radius $r$; Höhe $h$) wird ein gerades, regelmäßiges , sechsseitiges Prisma umbeschrieben. Berechnen Sie das Verhältnis: $V_{Zylinder} : V_{Prisma}$ zunächst exakt und dann in Prozent.

*Lösung:* $V_{Zylinder} : V_{Prisma} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \pi \approx 90{,}7\%$

11. Schraubenmuttern besitzen die Form eines geraden, regelmäßigen, sechsseitigen Prismas aus dem ein Zylinder herausgebohrt wurde. Zur Fertigung einer bestimmten Sorte von Schraubenmuttern verwendet man Hohlzylinder aus Metall (Durchmesser außen: $d_A = 2{,}2\,\text{cm}$; innen: $d_I = 0{,}8\,\text{cm}$; Höhe $h = 0{,}9\,\text{cm}$), die entsprechend zurechtgefräst werden (vgl. Abbildung).
Berechnen Sie die Masse einer Mutter aus Messing (Dichte $\varrho = 8{,}4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).



*Lösung:* ca. 20 g

12. Ein Rechteck mit den Seitenlängen $a$ und $10a$ läßt sich zur Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders mit der Höhe $10a$ oder mit der Höhe $a$ rollen. Wie verhalten sich jeweils die Volumina und die Oberflächen der beiden entstehenden Zylinder?

*Lösung:* $V_1 : V_2 = 1 : 10\,;$ $O_1 : O_2 = (5 + a\pi) : (5 + 100a\pi)$

13. Der Grundfläche eines Zylinders ist ein Quadrat vom Umfang $U = 28\sqrt{2}$ L.E. einbeschrieben, das die Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Seitenkantenlänge $s = 25$ L.E. bildet. Wie verhalten sich die Rauminhalte von Zylinder und Pyramide, wenn beide Körper gleiche Höhe haben?

*Lösung:* $V_{Zyl} : V_{Pyr} = 3\pi : 2$