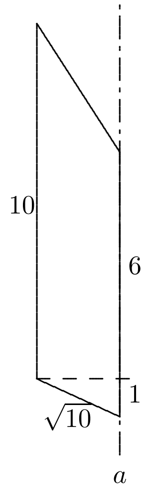
Zylinder und Kegel - Volumen und Oberfläche

1. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Körpers, der entsteht, wenn die Figur um die Achse a rotiert!



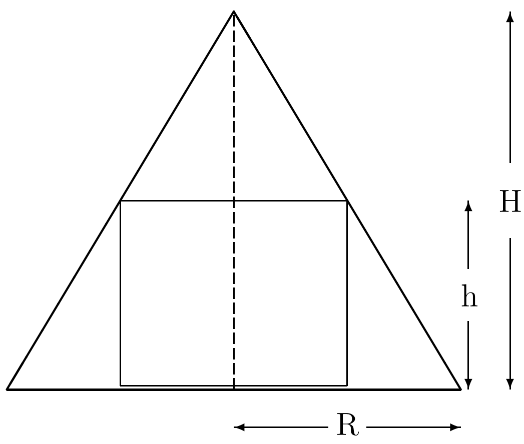
Lösung: $O = (75 + 3\sqrt{10}) \cdot \pi$

2. Gegeben ist ein gerader Kreiskegel mit dem Radius $R = a$ und der Höhe $H = \frac{4}{3}a$.

   (a) Berechnen Sie die Länge einer Mantellinie in Abhängigkeit von a!

   (b) Beim Abwickeln des Kegelmantels entsteht ein Kreissektor. Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel des Kreissektors!

   (c) Aus dem Kegel wird ein Zylinder mit der Höhe $h = a$ herausgebohrt (s. Skizze!). Berechnen Sie das Volumen des Zylinders in Abhängigkeit von a!



Lösung: (a): $\frac{5}{3}a$ $(b):$ $216°$ $(c):$ $\frac{\pi}{16}a^3$

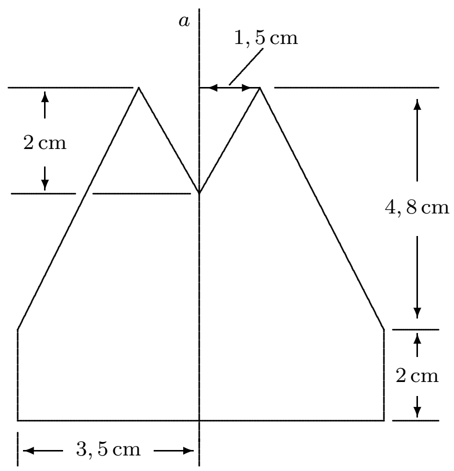
3. Ein Apfelmushersteller hat bei einer Dosenfabrik 12 000 zylindrische Blechdosen mit dem Radius r und der Höhe $h = 2\,r$ in Auftrag gegeben. In die bestellten Dosen paßt gerade sein gesamter Apfelmusvorrat. Der Designer der Dosenfabrik, ein mathematischer Analphabet, ließ statt der zylindrischen kegelförmige Dosen mit dem Radius $R = 9\,\text{cm}$ und der Höhe $H = 12\,\text{cm}$ herstellen. Die Oberfläche einer kegelförmigen Dose ist genauso groß wie die Oberfläche einer bestellten zylindrischen Dose. Wie viele kegelförmige Dosen müssen nachbestellt werden, damit der gesamte Musvorrat abgepackt werden kann?

Lösung: $r = 6\,\mathrm{cm}$; $V_K = 324\,\pi\,\mathrm{cm}^2$; $V_Z = 432\,\pi\,\mathrm{cm}^2$

$$\text{Gesamtzahl der Kegel} = 12\,000 \cdot \frac{V_Z}{V_K} = 16\,000$$

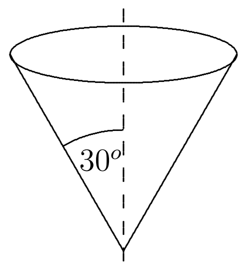
$\Longrightarrow$ 4000 Kegel nachbestellen

4. Die nebenstehend gezeichnete, zur Achse a symmetrische Figur rotiert um die Achse a. Berechne das Volumen V und die Oberfläche A des entstehenden Rotationskörpers!



Lösung: $V = 54{,}6\,\pi\,\mathrm{cm}^3$
$A = 56\,\pi\,\mathrm{cm}^2$

5. <u>Aus alt mach neu!</u>
Man nehme 35 Weihnachtskerzen, die eine Zylinderform mit 10 mm Radius und 13,2 cm Höhe sowie einen 4 mm dicken Docht haben. Nach dem Entfernen des Dochtes werden die Kerzen in einem Topf zum Schmelzen gebracht.
   (a) Welches Volumen hat die Wachsmasse?
   (b) Schüttet man die flüssige Wachsmasse in einen kegelförmigen Trichter mit einem Öffnungswinkel von 60^o(vgl. Zeichnung), so entsteht eine herrliche Geburtstagskerze. Wie hoch steht die Wachsmasse im Trichter?



Lösung: $1219\,\mathrm{cm}^3$ und 15,2 cm

6. Ein gleichseitiger Kegel (d.h. Grundkreisdurchmesser = Mantellinienlänge) und ein gleichseitiger Zylinder (d.h. Grundkreisdurchmesser = Zylinderhöhe) haben gleiche Oberflächen.
Wie verhalten sich ihre Rauminhalte?

Lösung: $V_Z : V_K = \sqrt{6} : 2$

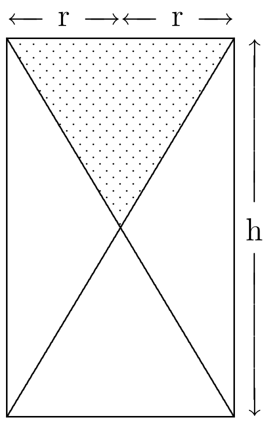
7. Einem Kegel mit Radius r und Höhe h ist ein Zylinder einbeschrieben, der auf der Grundfläche des Kegels steht und dessen Grundkreisdurchmesser gleich seiner Höhe ist. Wie verhalten sich die Volumina von Kegel und Zylinder zueinander?

Lösung: $V_{Ke} : V_{Zy} = (2r + h)^3 : 6rh^2$

8. Bei einem Kegel mit Grundkreisradius r und Höhe h ist die Mantellinienlänge m doppelt so groß wie h. Dem Kegel ist ein Zylinder einbeschrieben, der auf der Grundfläche des Kegels steht und dessen Mantelfläche ein Viertel der Mantelfläche des Kegels beträgt. Welchen Radius ϱ besitzt der Zylinder?

Lösung: $\varrho = \frac{r}{2}$

9. In eine zylinderförmige Eieruhr aus Plexiglas (Radius $r = 4\,\text{cm}$, Höhe $h = 12\,\text{cm}$) sind zwei gleiche Kegel eingeschliffen, die sich mit den Spitzen berühren und dort gegenseitig durchlässig sind (vgl. Abb.). Der obere Kegel sei ganz mit feinem Sand gefüllt, der innerhalb von 5 Minuten in den unteren Kegel abfließen kann.



   (a) Wie viele Kubikmillimeter Sand fließen pro Sekunde ab, wenn eine gleichbleibende Geschwindigkeit vorausgesetzt wird?

   (b) Wie hoch steht der Sand im oberen Kegel nach 3 Minuten?

   (c) Berechnen Sie die Masse der Eieruhr!
   ($\varrho_{Plexiglas} = 1{,}2\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$; $\varrho_{Sand} = 1{,}8\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$)

Lösung: $335\,\text{mm}^3$; $4{,}4\,\text{cm}$; $664\,\text{g}$