Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen

1. Vereinfachen Sie für $0 \leq \alpha \leq 90^o$: $\sqrt{1+\tan^2\alpha} \cdot \sin(90^o - \alpha)$

   Lösung: 1

2. Berechnen Sie $\tan\varphi$ ohne Taschenrechner, wenn $|\cos\varphi| = \frac{10}{26}$ und $\varphi \in [90^o; 180^o]$.

   Lösung: $-2{,}4$

3. Für welche Winkel φ gilt: $\varphi \in [0^o; 360^o]$ und $\cos\varphi = -\sin\varphi$

   Lösung: 135^o und 315^o

4. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$$

   Lösung: $\tan 2\alpha$

5. Vereinfachen Sie die folgenden trigonometrischen Ausdrücke so weit wie möglich:

   (a) $\frac{1}{\tan\alpha\cos\alpha}$

   (b) $\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\tan\alpha}$

   (c) $\sqrt{1+\sin\alpha} \cdot \sqrt{1-\sin\alpha}$

   (d) $\dfrac{1}{1+(\tan\alpha)^2}$

   Lösung: (a) $\frac{1}{sin\alpha}$ (b) $\frac{1}{sin\alpha}$ (c) $|cos\alpha|$ (d) $(cos\alpha)^2$

6. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}\right) \cdot \tan\alpha$$

   Für welche $\alpha \in [0°; 360°[$ ist dieser Term nicht definiert?

   Lösung: $-\sin\alpha$; Term nicht definiert für $\alpha = 0°, 90°, 270°$.

7. Bestimmen Sie die Definitionsmenge des Terms

$$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha \cdot (\tan^2\alpha + 1)}$$

   in der Menge $[0^0; 360^0[$ und vereinfachen Sie diesen soweit wie möglich.

Lösung: a) $\mathbb{D} = [0^0; 360^0[\backslash\{0^0; 90^0; 180^0; 270^0\}$ b) $\cos^3\alpha$

8. Vereinfachen Sie folgenden Term soweit wie möglich:

$$\frac{\tan\alpha - \tan\alpha \cdot \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

Für welche $\alpha \in [0°; 360°[$ ist dieser Term <u>nicht</u> definiert?

Lösung: $\frac{1}{2}$; Der Term ist nicht definiert für $\alpha \in \{0^o; 90^o; 180^o; 270^o\}$

9. Der **Kotangens** eines Winkels ist definiert als $\cot\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Gib die Definitionsmenge an und vereinfache soweit wie möglich:

$$\frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\cot^2 x}$$

Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{x | x = k\,\pi \text{ oder } x = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{1}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{1+\frac{1}{\tan^2 x}} = 1$$

10. (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist der folgende Term nicht definiert?

$$\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} - x)}{1-\sin^2 x} + \frac{\tan(-x)}{\tan(\frac{\pi}{2} - x)}$$

(b) Vereinfachen Sie den Term soweit wie möglich!

Lösung: (a) für $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$; (b) 0

11. Vereinfachen Sie folgenden Term soweit wie möglich. Grundmenge ist $\mathbb{G} = [0; \frac{\pi}{2}[$.

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sqrt{1 + (\tan x)^2}$$

Lösung: $\tan x$

12. Zeichnen Sie einen Kreis mit Radius 5 cm. Dieser Kreis sei der Einheitskreis.

(a) Bestimmen Sie mit größtmöglicher Genauigkeit $\sin 40^o$ und $\cos 40^o$ und berechnen Sie daraus $\tan 40^o$.

(b) Bestimmen Sie mit größtmöglicher Genauigkeit den Winkel β im I. Quadranten so, dass $\sin\beta = 0{,}8$.

(c) Veranschaulichen Sie die Gleichung $\sin 230^o = \sin 310^o$. Welche allgemeine Formel liegt dieser Gleichung zugrunde?

Lösung: zu (c): $\sin\varphi = -\sin(\varphi + 180^o) = -\sin(360^o - \varphi)$ für $0^o < \varphi < 90^o$

13. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$\cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha$$

Lösung:

14. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$$

Lösung:

15. Drücken Sie $\sin\alpha$ für $0° \leq \alpha < 90°$ durch $\tan\alpha$ aus.
Hinweis: Quadrieren Sie zunächst $\tan\alpha$.

Lösung: $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{(\tan\alpha)^2+1}}$

16. Zeigen Sie für $0° \leq \alpha < 90°$ die Gültigkeit folgender Formel:

$$\cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\,\alpha}}$$

Geben Sie zwei Gründe dafür an, dass diese Formel nicht für alle Winkel im Bereich $0° \leq \alpha \leq 360°$ gelten kann!

Lösung: Formel liefert z.B. im 2. Quadranten nicht das richtige Vorzeichen für den Kosinus. Außerdem ist der Tangens für $90°$ und $270°$ nicht definiert.