Zylinder, Kegel und Kugel - Volumen und Oberfläche

1. (a) Eine Glaskugel mit 12 cm Durchmesser wird in einen möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wieviele Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes werden verschenkt?

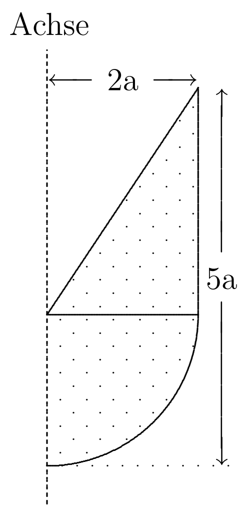
   (b) Der Glasbläser hat die Kugel aus einem 3 cm dicken Tropfen Glas geblasen. Wie dick ist die Glaswand der Kugel?

   Lösung: $\frac{2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = 33\%$
   $\frac{4\pi}{3} r_0^3 \approx 4\pi R^2 d$ ergibt $d \approx 0.3\ mm$; eine exakte Rechnung liefert dasselbe Ergebnis.

2. In einem Messzylinder mit dem inneren Radius $R = 1{,}2\,\text{cm}$ steht eine Flüssigkeit 3 cm hoch. Diese Flüssigkeit wird in ein Reagenzglas mit dem inneren Radius $r = 0{,}6\,\text{cm}$ gegossen. Wie hoch (in cm) steht die Flüssigkeit im Reagenzglas vom untersten Punkt aus gemessen?
   Hinweis: Betrachten Sie das Reagenzglas als Zylinder mit angesetzter Halbkugel!

   Lösung: 12,2 cm

3. Berechnen Sie die Gesamtoberfläche des Rotationskörpers in Abhängigkeit von a und π!



   Lösung: $O = a^2\pi(20 + 2\sqrt{13})$

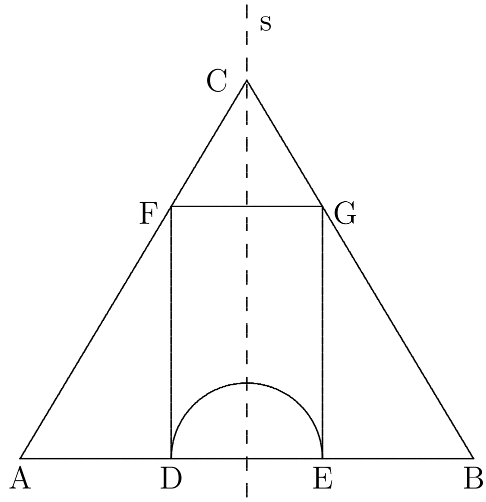
4. Eine Kugel wird in einem möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wieviel Prozent des Zylindervolumens bleiben frei?

   Lösung: 33%

5. Einer Kugel vom Radius r ist ein Zylinder mit der Höhe $h = 1{,}5r$ einbeschrieben. Wie verhalten sich die Rauminhalte der beiden Körper?

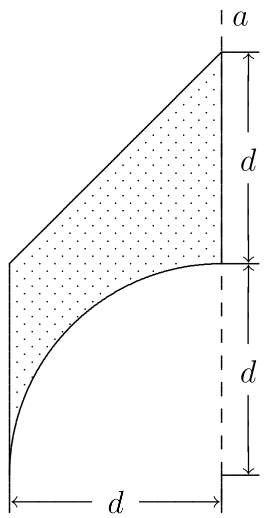
Lösung: $V_Z : V_K = 63 : 128$

6. Aus dem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge $2a$ werde die Figur $DEFG$ mit dem Halbkreisbogen DE herausgestanzt. Das restliche Flächenstück rotiere um die Achse s. Ferner gilt $\overline{CG} = \frac{2}{3}a$.
   Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers in Abhängigkeit von a und stellen Sie das Ergebnis in möglichst einfacher Form dar!



Lösung: Strahlensatz!
$V_{Rot} = \frac{1}{81}a^3\pi \cdot \left(21\sqrt{3} + 2\right)$

7. Durch Rotation der schraffierten Fläche um die Achse a entsteht ein Rotationskörper (runder Turm mit halbkugelförmigem Innenraum).
   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche in Abhängigkeit von d.
   (b) Berechnen Sie den Rauminhalt des Rotationskörpers in Abhängigkeit von d. Das Ergebnis soll möglichst weit vereinfacht werden.



Lösung: $A = \sqrt{2}\pi d^2$ und $V = \frac{2}{3}\pi d^3$

8. Tennisbälle werden in Sportgeschäften häufig in zylindrischen Blechdosen angeboten. dabei werden 4 Bälle übereinander in der Dose gestapelt. Wie groß ist der in der Dose verbleibende Hohlraum, wenn man von einem Balldurchmesser von 7cm ausgeht. Um welchen Anteil des Dosenvolumens handelt es sich dabei?

Lösung: Anteil $\frac{1}{3}$, Volumen $359cm^3$

9. Ein Hohlzylinder (Höhe $h = 10\,\text{cm}$; Außendurchmesser $d = 3\,\text{cm}$; Wanddicke $a = 2\,\text{mm}$) aus Blei wird geschmolzen und

a) in eine Vollkugel
b) in eine Hohlkugel mit gleicher Wanddicke a
umgeformt. Berechne jeweils den Außendurchmesser der Kugel!

Lösung: a) $d_K = 3{,}2\,\text{cm}$; b) $d_K = 5{,}4\,\text{cm}$

10. Einer Kugel vom Radius R ist ein Zylinder einbeschrieben, dessen Mantelfläche sich zur Kugeloberfläche wie $1:2$ verhält. (Schnittskizze!)

    (a) Zeigen Sie, dass diese Bedingung nur erfüllt ist, wenn der Zylinderradius halb so groß ist wie die Zylinderhöhe!

    (b) Welchen prozentualen Anteil des Kugelvolumens macht das Zylindervolumen aus?

Lösung: 53,0%

11. Einem geraden Kreiskegel vom Grundkreisradius r, dessen Axialschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, lassen sich eine Kugel vom Radius R_e einbeschreiben und eine Kugel vom Radius R_u umbeschreiben.

    (a) Zeichnen Sie einen gemeinsamen Axialschnitt der drei Körper für $r = 3\,\text{cm}$!

    (b) Stellen Sie allgemein die Radien R_e und R_u der beiden Kugeln in Abhängigkeit von r dar!
    (Teilergebnis: $R_e = \frac{r}{3}\sqrt{3}$)

    (c) Wie verhalten sich die Volumina von umbeschriebener Kugel, Kegel und einbeschriebener Kugel?

Lösung: (b) $R_u = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ (c) $V_u : V_{Ke} : V_e = 32 : 9 : 4$

12. Ein auf der Spitze stehender gleichseitiger Hohlkegel (d.h. ein Axialschnitt des Kegels ergibt ein gleichseitiges Dreieck) ist teilweise mit Wasser gefüllt. Wirft man in den Kegel eine Kugel mit dem Radius r, so wird diese gerade ganz von Wasser bedeckt und der Kegel ganz mit Wasser gefüllt. Berechnen Sie die Tiefe des Wassers vor und nach dem Hineinwerfen der Kugel!

Lösung: vorher: $r\sqrt[3]{15}$; nachher: $3r$

13. In einen auf der Spitze stehenden gleichseitigen Hohlkegel (d.h. ein Axialschnitt des Kegels ergibt ein gleichseitiges Dreieck) wird eine Kugel vom Radius r geworfen. Die Kugel taucht dabei gerade vollständig in den Kegel ein. Wie verhalten sich die Oberflächeninhalte von Kegel und Kugel?

Lösung: $O_{Ke} : O_{Ku} = 9 : 4$

14. Einer Kugel vom Radius r wird ein gerader Kegel der Höhe $4r$ umbeschrieben.

    (a) Berechnen Sie den Öffnungswinkel α des Kegels (Planfigur).

    (b) Wie groß ist der Radius des Berührkreises?

    (c) Welches Verhältnis bilden Mantelfläche und Kugeloberfläche?

Lösung: (a) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$

(b) $\varrho = \sqrt{8}\sin\frac{\alpha}{2}$

(c) $3 : 2$