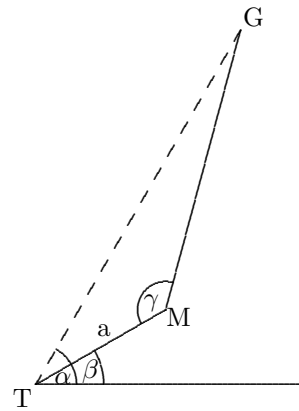


Vermessungsaufgaben

1. Vom Punkt T der Talstation einer Tragseilbahn aus sieht man den Gipfel G eines Berges unter dem Höhenwinkel $\alpha = 60^\circ$.

Die Seilbahn fährt zunächst $a = 994$ m weit unter einem Steigungswinkel von $\beta = 30^\circ$ zur Mittelstation M. Dort ist der Winkel $\gamma = \sphericalangle GMT = 135^\circ$, wobei die Punkte T, M und G in einer vertikalen Ebene liegen.

Wie hoch liegt der Gipfel G im Vergleich zur Talstation T?



Lösung: 2352 m

2. Über einen Teich soll von A nach B eine Brücke gebaut werden.

Der Vermessungsingenieur misst:

$$\overline{AP} = 287 \text{ m}$$

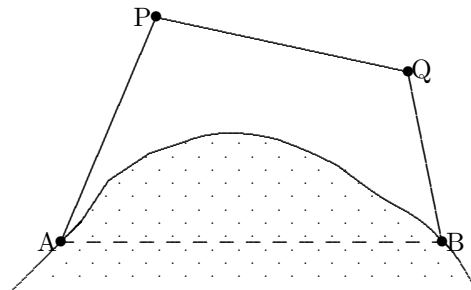
$$\overline{PQ} = 326 \text{ m}$$

$$\overline{QB} = 135 \text{ m}$$

$$\sphericalangle APQ = 105^\circ$$

$$\sphericalangle PQB = 127^\circ$$

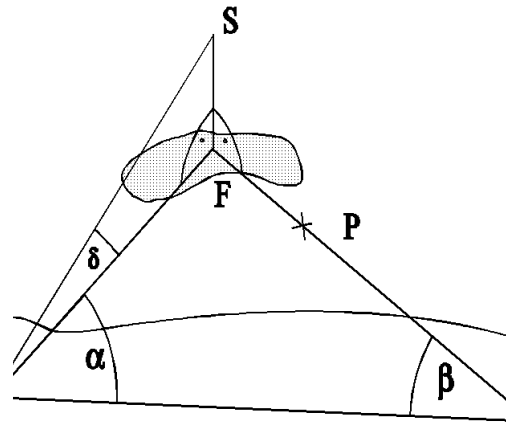
Berechnen Sie die Länge der Brücke \overline{AB} !



Lösung: 510 m; Diagonale einzeichnen!

3. Auf einer dem Festland vorgelagerten Insel im Meer steht ein Leuchtturm der Höhe $h = \overline{FS}$ (vgl. "räumliche" Abbildung). Um h zu bestimmen steckt man am Strand eine Standlinie $[AB]$ der Länge 420 m ab und misst die Winkel $\alpha = 48,7^\circ$, $\beta = 77,2^\circ$ und den Höhenwinkel $\delta = 6,2^\circ$.

- (a) Berechnen Sie die Höhe h des Leuchtturms gerundet auf Meter. (Ergebnis: 55 m)
- (b) Eine Fähre, die die Linie $[BF]$ befährt, sendet im Punkt $P \in [BF]$ ein Nebelhornsignal aus, das in S genau 1,0 s nach dem Aussenden empfangen wird (Schallgeschwindigkeit $v = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Wie weit war die Fähre von F und bzw. von A entfernt?



Lösung: $h = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \tan \delta \cdot \overline{AB} = 55 \text{ m}$

$$\overline{PF} = \sqrt{\overline{PS}^2 - h^2} = 325 \text{ m,}$$

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{PF}^2 - 2\overline{AF} \cdot \overline{PF} \cos(180^\circ - \alpha - \beta)} = 411 \text{ m}$$

4. Von einer geraden Landstraße zweigt in P nach rechts vorne eine gerade Seitenstraße nach A ab. Geht man auf der Landstraße 4 km weiter, so führt ein Fußweg unter einem Winkel von 60° nach rechts vorne ebenfalls nach A . Seitenstraße und Fußweg treffen sich in A unter 45° . Nach B , das 5 km von A entfernt ist, führt von P aus eine 6 km lange Seitenstraße unter einem Winkel φ nach vorne links. Erstellen Sie eine saubere Planskizze und berechnen Sie dann den Winkel φ auf Grad genau!

Lösung: 38°

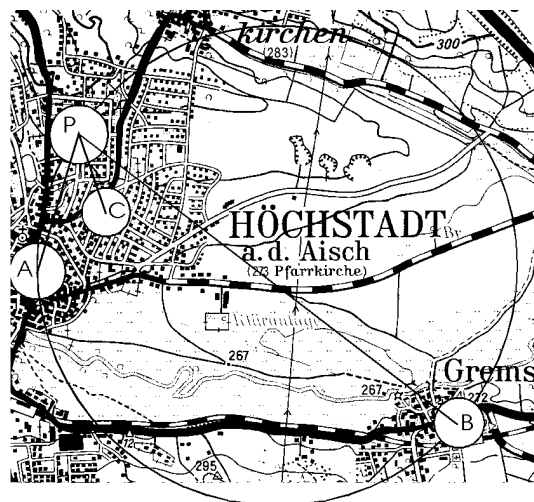
5. Die Lage eines Punktes P auf einer Karte soll durch "Vorwärtseinschneiden" bestimmt werden. Dazu misst man von zwei trigonometrischen Punkten A und B aus die Winkel $\varepsilon = \sphericalangle BAP$ und $\delta = \sphericalangle PBA$. Im folgenden werden Koordinaten relativ zu A benutzt: $A(0|0)$ und $B(2188,12 | -815,88)$ (Einheit 1m). Es sei $\varepsilon = 95,1^\circ$ und $\delta = 18,4^\circ$.

- (a) Berechnen Sie die Entfernung \overline{AB} und den Winkel von $[AB]$ gegen die x-Achse.
- (b) Berechnen Sie \overline{AP} und die Koordinaten von P .

Lösung: (a) $\overline{AB} = 2335\text{m}$, Winkel $339,6^\circ$

(b) $\overline{AP} = 804\text{m}$ mit Hilfe des Sinussatzes, Winkel von $[AP]$ gegen die x-Achse: $74,7^\circ$, Koordinaten $P(213|775)$.

6. Beim "Rückwärtseinschneiden" werden die Koordinaten des Standorts P durch Winkelpeilung zu drei trigonometrischen Punkten A , B und C bestimmt. Im folgenden wird A als Koordinatenursprung) benutzt (Einheit 1m): $A(0|0)$, $B(2188,12|-815,88)$, $C(402,26|403,66)$. Gemessen werden $\alpha = \sphericalangle APC = 42,1^\circ$ und $\beta = \sphericalangle CPB = 24,4^\circ$.



- (a) Die Gerade PC schneidet den Umkreis des Dreiecks ABP im Punkt Q . Fertigen Sie eine Skizze und bestimmen Sie ohne Rechnung die Winkel $\sphericalangle QAB$ und $\sphericalangle ABQ$.
- (b) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Halbgeraden $[AB$ und der x-Achse sowie die Entfernung \overline{AB} . (Ergebnis: $339,6^\circ$, $\overline{AB} = 2335,3\text{m}$)
- (c) Berechnen Sie \overline{AQ} und die Koordinaten von Q . (Ergebnis: $Q(1210|-1204)$.)
- (d) Berechnen Sie $\varepsilon = \sphericalangle BQC$ und $\delta = \sphericalangle CQA$ und begründen Sie anschließend $\sphericalangle BAP = \varepsilon$ sowie $\sphericalangle PBA = \delta$.
- (e) Geben Sie an, wie die Koordinaten von P jetzt mit Hilfe der Winkel ε , δ sowie der Koordinaten von A und B berechnet werden können. Keine Rechnung!

- Lösung:* (a) Nach dem Umfangswinkelsatz: $\sphericalangle QAB = \beta$, $\sphericalangle ABQ = \alpha$.
- (b) $\overline{AB} = 2335,3\text{m}$, Winkel $339,6^\circ$
- (c) Mit dem Sinussatz $\overline{AQ} = 1707\text{m}$, der Winkel von $[AQ$ gegen die x-Achse ist $339,6^\circ - \beta = 315,2^\circ = -44,8^\circ$. Dies ergibt die Koordinaten $Q(1210|-1204)$.
- (d) Mit den Polarwinkeln der Vektoren \overrightarrow{QB} und \overrightarrow{QC} oder mit dem Cosinussatz erhält man $\varepsilon = 95,0^\circ$ und mit der Winkelsumme im Dreieck ABC ergibt sich $\delta = 18,5^\circ$. Die letzte Behauptung folgt wieder aus dem Umfangswinkelsatz
- (e) Man berechnet $\overline{AP} = 806,5\text{m}$ mit dem Sinussatz, der Winkel von $[AP$ gegen die x-Achse ist $\varepsilon - 20,45^\circ$. daraus können die Koordinaten von P bestimmt werden.

Bemerkung: Dieses Verfahren, die Koordinaten eines Punkts durch Rückwärtseinschneiden zu bestimmen, heißt "Collinssche Lösung". Dazu werden in zwei Schritten, jeweils von der Basisstrecke $[AB]$ aus, Punkte durch "Vorwärtseinschneiden" festgelegt (erst Q , dann P).