Vermessungsaufgaben ohne Sinus- und Kosinusatz

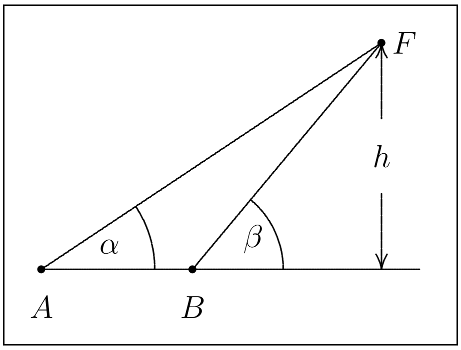
1. Eine Radarstation R peilt einen heranfliegenden Überschalljäger F an und ermittelt alle 5 s die Entfernung $r = \overline{RF}$ des Flugzeugs zur Station sowie den Winkel φ der Geraden RF zur Horizontalen. Zwei aufeinanderfolgende Datensätze sind

$$\begin{aligned} r_1 &= 6946\,\mathrm{m}\,; \quad \varphi_1 = 30{,}26° \\ \text{und} \quad r_2 &= 5000\,\mathrm{m}\,; \quad \varphi_2 = 36{,}87°. \end{aligned}$$

   Erstellen Sie eine Zeichnung des Sachverhaltes im Maßstab 1 : 100 000 und berechnen Sie die horizontale Geschwindigkeit v_H, die Sinkgeschwindigkeit v_S sowie die Gesamtgeschwindigkeit v des Flugzeuges! Achten Sie auf eine sinnvolle Genauigkeit!

Lösung: $v_H = 400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_S = 100\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v = 412\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

2. Zwei Buben haben sich an den Orten A und B aufgestellt ($\overline{AB} = 1000\,\mathrm{m}$) und bestimmen mit selbstgebastelten Winkelmessern die Winkel $\alpha = 30°$ und $\beta = 45°$ eines Flugzeuges F zur Horizontalen (siehe Abb.).



   (a) Berechnen Sie die Höhe h des Flugzeuges über Grund unter der Annahme, dass die beiden gemessenen Winkel exakt sind!

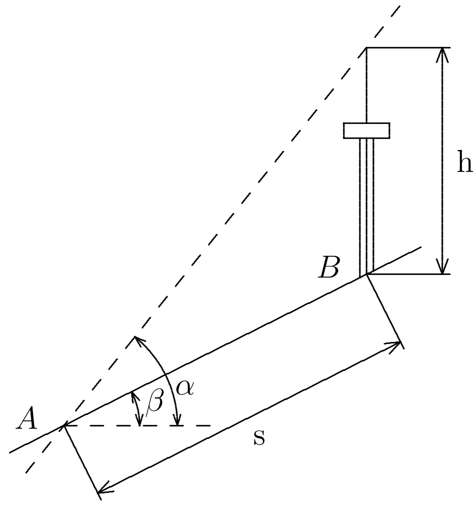
   (b) In welchem Intervall liegt h, wenn die gemessenen Winkel jeweils mit einem Fehler von $\pm 1°$ behaftet sind? Erstellen Sie unbedingt eine Überlegungsfigur!

Lösung: (a) $h = \overline{AB} \cdot \dfrac{\tan\alpha\,\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha} = 500\,\mathrm{m} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 1366\,\mathrm{m}$

(b) $h_{\min} = 1000\,\mathrm{m} \cdot \dfrac{\tan 29°\ \tan 46°}{\tan 46° - \tan 29°} \approx 1193\,\mathrm{m}$

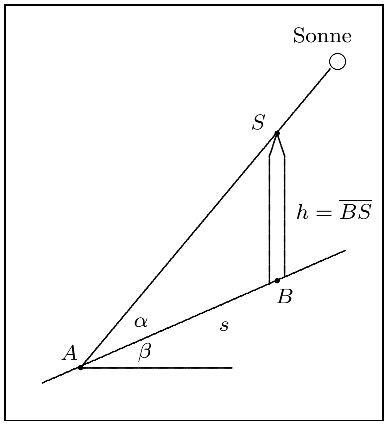
$h_{\max} = 1000\,\mathrm{m} \cdot \dfrac{\tan 31°\ \tan 44°}{\tan 44° - \tan 31°} \approx 1590\,\mathrm{m}$

3. Ein Turm der Höhe $h = 25$ m steht auf einem Hang, der unter dem Winkel $\beta = 28^o$ gegen die Horizontale geneigt ist. Die Schattenlänge $s = \overline{AB}$ des Turms beträgt bei dem aus der Skizze ersichtlichen Sonnenstand 45 m. Berechnen Sie den Höhenwinkel α, unter dem die Sonne erscheint,auf Grad genau.



Lösung: $\tan\alpha = \dfrac{h + s\sin\beta}{s\cos\beta}$
liefert $\alpha = 49{,}3°$

4. Ein Turm der Höhe h steht an einem Hang, der unter dem Winkel $\beta = 30°$ gegen die Horizontale geneigt ist. Die Schattenlänge $s = \overline{AB}$ des Turms ist bei dem aus der Skizze ersichtlichen Sonnenstand gerade doppelt so groß wie die Turmhöhe. Berechne den Winkel α zwischen Sonnenstrahlen und Hang! Fertige eine saubere Zeichnung an, aus der die Bedeutung aller verwendeten Größen hervorgeht!



Lösung: $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{h + 2\,h\,\sin\beta}{2\,h\,\cos\beta} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $\alpha \approx 19{,}1°$

5. Die Höhe eines Schlotes soll durch Winkelmessung mit einem Theodoliten bestimmt werden. Weil der Turmfuß nicht sichtbar ist, wird folgendes Verfahren gewählt: Vom Punkt A aus wird der Winkel α zwischen der Horizontalen und der Blickrichtung zur Turmspitze gemessen. Anschließend wird der Theodolit **waagrecht** in Richtung des Turms zum Punkt B bewegt und die Messung wiederholt (Winkel β).
   (a) Berechnen Sie die Turmhöhe h aus $\overline{AB} = 51{,}7$m, $\alpha = 23{,}65^0$ und $\beta = 26{,}20^0$.
   (b) Wie ändert sich dieses Ergebnis, wenn annimmt,dass der Messwert von α mit einem Fehler von $\pm 0{,}05^0$ behaftet ist? Runden Sie den Wert von h zweckmäßig.

Lösung: (a) $h = \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot \overline{AB} = 205{,}8$m
(b) Fehler: ca. 4m, $h = 206$m