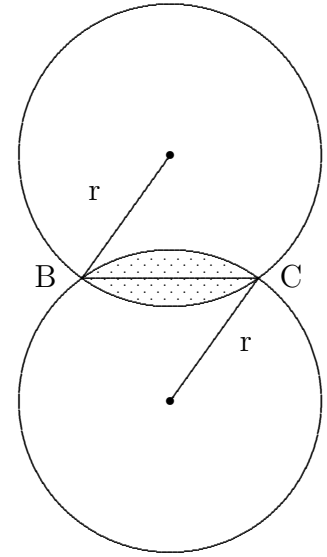


Kreisteile - auch Segmente

1. Die schattierte Fläche wird von zwei Kreisen mit gleichem Radius r eingeschlossen. Dabei gilt für die gemeinsame Sehne: $\overline{BC} = r$. Berechnen Sie für $r = 1,00$ cm den Inhalt A der schattierten Fläche!

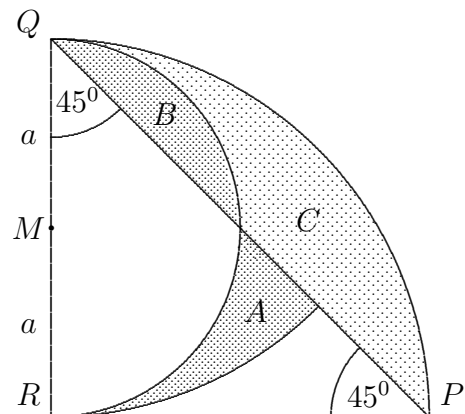


Lösung: $A \approx 0,181 \text{ cm}^2$

2. An den Orten B und C mit $\overline{BC} = 100$ km ist je ein Radiosender aufgestellt. Beide Sender haben eine Reichweite von $a = 100$ km. G ist die Menge aller Punkte, an denen beide Sender gleichzeitig empfangen werden können. Fertigen Sie eine genaue Zeichnung des Sachverhaltes im Maßstab $1 : 2\,000\,000$ an und berechnen Sie den Flächeninhalt A von G . Drücken Sie A zuerst allgemein durch a aus und setzen Sie dann Zahlen ein (drei geltende Ziffern)!

Lösung: $\varphi = 120^\circ$; $A = 2 \cdot (A_{\text{Sektor}} - A_{\text{Dreieck}}) = 2a^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \approx 12300 \text{ km}^2$

3. Die Flächen A , B und C werden von den Seiten des gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks PQR sowie von den Kreisbögen um die Ecken Q und R und den Seitenmittelpunkt M begrenzt.

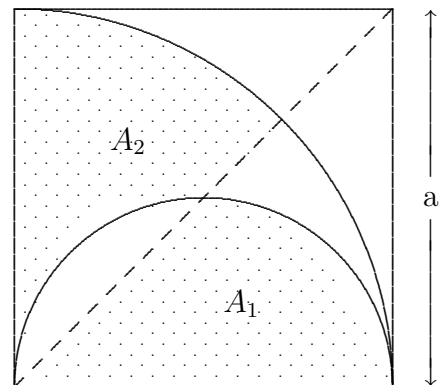


- (a) Berechnen Sie die Flächeninhalte von B und C in Abhängigkeit von $a = \frac{1}{2}\overline{QR}$.
- (b) Zeigen Sie, dass die Flächeninhalte von A und B gleich sind.

Lösung: Es ist $B = \frac{1}{2}a^2(\frac{1}{2}\pi - 1)$. C hat die vierfache Fläche vermindert um die von B , ist also dreimal so groß. A und B sind gleich groß, weil der Halbkreis um M und der Viertelkreis um Q denselben Flächeninhalt haben.

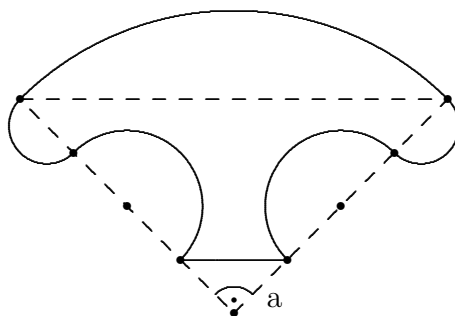
4. In nebenstehender Figur ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass die schattierten Flächen A_1 und A_2 gleichen Inhalt haben!
- (b) Berechnen Sie jeweils den Umfang der schattierten Flächen A_1 und A_2 in Abhängigkeit von a !



Lösung: (a): $A_{A_1} = A_{A_2} = \frac{a^2}{16} \cdot (\pi + 2)$
 (b): $U_{A_1} = \frac{a}{4} \cdot (4 + \pi + 2\sqrt{2})$
 $U_{A_2} = \frac{a}{2} \cdot (4 + \pi - \sqrt{2})$

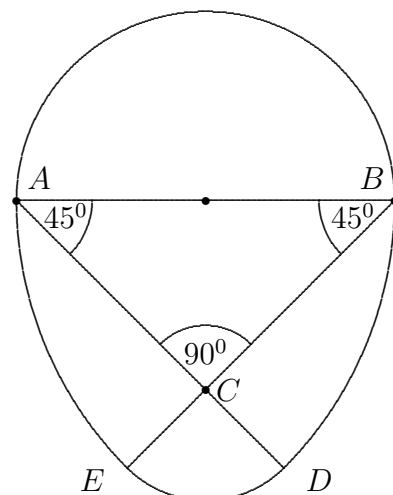
5. Berechnen Sie Fläche und Umfang der Figur in Abhängigkeit von a . (Beide Dreiecke sind gleichschenkelig-rechtwinklig, die Katheten werden durch die markierten Punkte gleichmäßig im Abstand a geteilt, die Kreismittelpunkte liegen auf den Katheten.)



Lösung: $U = 5\pi a + \sqrt{2}a$, $A = 3,25a^2\pi - 0,5a^2$

6. Das abgebildete „Osterei“ besteht aus Kreisbögen, deren Mittelpunkte A , B , C und M und deren Radien durch das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck ABC festgelegt sind.

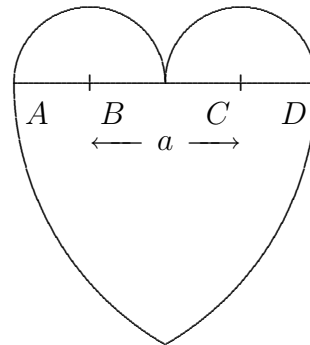
- (a) Berechnen Sie die Radien \overline{BD} und \overline{CD} der Kreisbögen um B bzw. C in Abhängigkeit von $\overline{AM} = r$.
- (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des „Ostereies“.



Lösung: (a) $\overline{BD} = 2r$ und $\overline{CD} = (2 - \sqrt{2})r$
 (b)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\pi r^2 + \left(2 \cdot \frac{1}{8}\pi(2r)^2 - r^2\right) \\ & + \frac{1}{4}\pi \left[(2 - \sqrt{2})r\right]^2 \\ & = [(3 - \sqrt{2})\pi - 1]r^2 \approx 3,98r^2 \end{aligned}$$

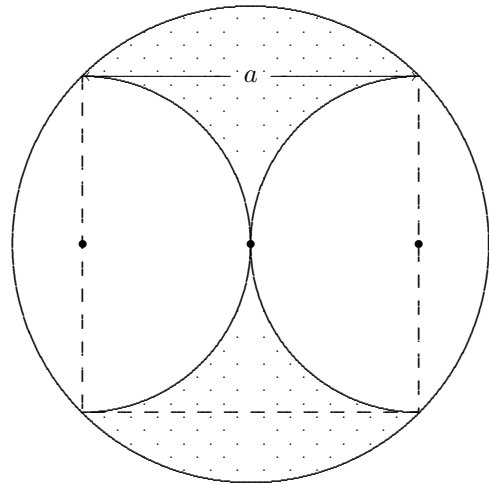
7. Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von a . (Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind die Punkte A , B , C und D .)



Lösung: $U = \frac{7}{3}\pi a$, $A = \left(\frac{19}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$

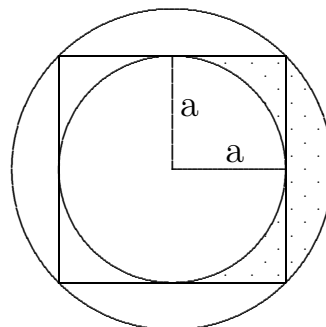
8. Gegeben ist die rechts gezeichnete Kreisbogenfigur.

- (a) Übertragen Sie die Figur auf das Arbeitsblatt und bezeichnen Sie alle benötigten Stücke.
 (b) Berechnen Sie den punktierten Flächeninhalt in Abhängigkeit von a .



Lösung: $A = \frac{1}{2}a^2$

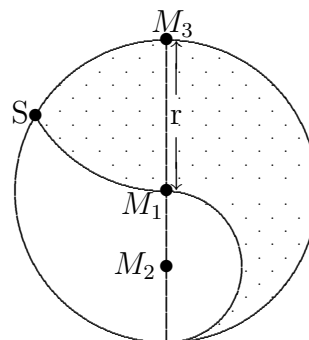
9. Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der punktierten Fläche in Abhängigkeit von a und π !



Lösung: $A = a^2; U = a(\frac{1}{2}\sqrt{2}\pi + 2 + \pi)$

10. Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der punktierten Fläche in Abhängigkeit von r und π !

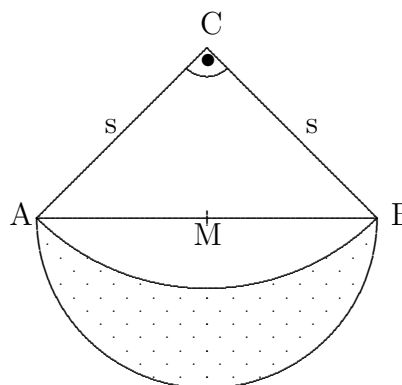
Hinweis: Das Dreieck SM_1M_3 ist ein besonderes Dreieck!



Lösung: $A = \frac{17}{24}r^2\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}r^2; U = \frac{13}{6}r\pi$

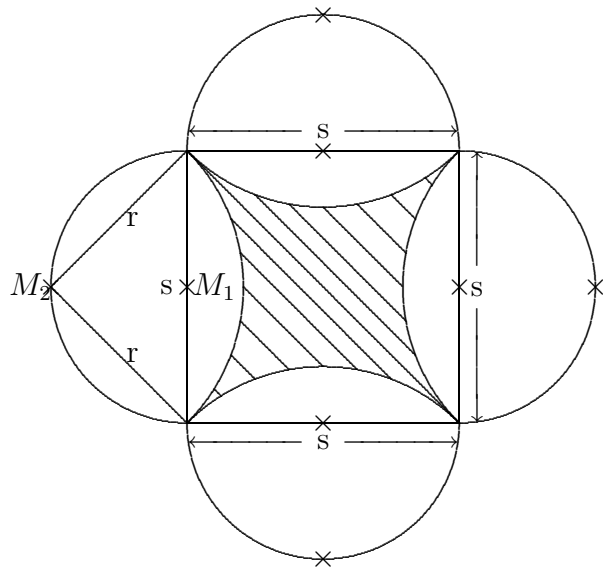
11. Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig und rechtwinklig. Mit s ist die Kathetenlänge bezeichnet. M halbiert die Hypotenuse $[AB]$.

Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang der punktierten Sichel in Abhängigkeit von s !



Lösung: $A = \frac{1}{2}s^2; U = \frac{1}{2}s\pi(1 + \sqrt{2})$

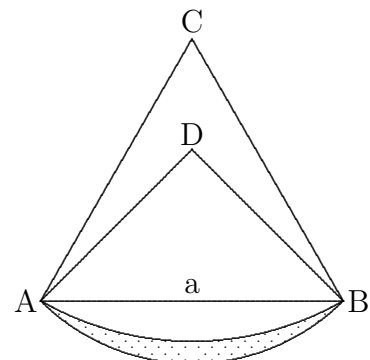
12. (a) Berechnen Sie r in Abhängigkeit von s .
- (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von s !
- (c) Berechnen Sie den Umfang der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von s !



Lösung: $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}s$; $A = s^2(2 - \frac{1}{2}\pi)$; $U = \sqrt{2}s\pi$

13. Das Dreieck ABC ist gleichseitig mit der Seitenlänge a . Das Dreieck ABD ist gleichschenkelig und rechtwinklig. C und D sind die Mittelpunkte der gezeichneten Kreisbogenstücke.

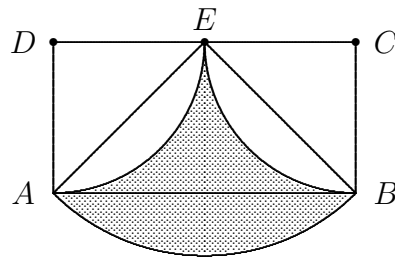
- (a) Für welches a hat die punktierte Sichel den Umfang $\pi \cdot (3\sqrt{2} + 4)$?
- (b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Sichel in Abhängigkeit von a !



Lösung: $a = 12$; $A = a^2(-\frac{1}{24}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4})$

14. Die Ecken C und D eines Rechtecks $ABCD$ sind Mittelpunkte von zwei Kreisen vom Radius a , die sich im Mittelpunkt E einer Seite berühren und jeweils durch die beiden anderen Ecken gehen.

- (a) Zeigen Sie, dass die schraffierte Fläche und das Dreieck ABE inhaltsgleich sind.
- (b) Für welchen Wert von a ist der Umfang der schraffierten Fläche um 5cm länger als der Umfang des Dreiecks ABE ? Geben Sie das Ergebnis in cm mit zwei gültigen Ziffern an.



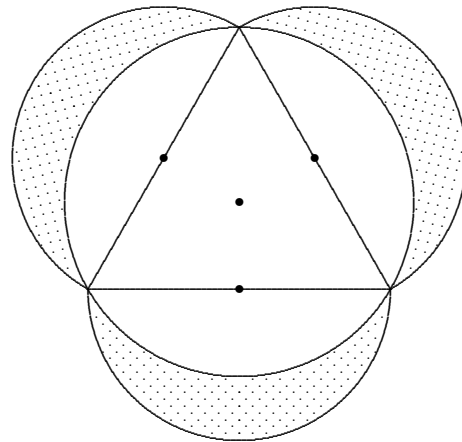
Lösung: $a = 9,4\text{cm}$

15. Zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 mit den Radien r und $4r$ bilden einen Kreisring. Im Abstand $2r$ vom gemeinsamen Mittelpunkt beider Kreise wird auf einem Radius des größeren Kreises K_2 eine Lotgerade errichtet, welche den Kreisring in zwei Teile teilt. Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte zunächst exakt und dann prozentual gerundet!

Lösung: $\frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{29\pi + 12\sqrt{3}} = 0,26$; Gleichseitiges Dreieck beachten!

16. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a . (Die Mittelpunkte der Kreisbögen sind durch Punkte markiert.)

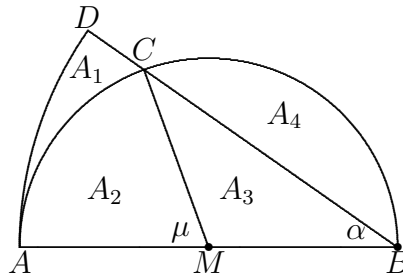
- (a) Berechnen Sie Fläche und Umfang des Umkreises.
- (b) Berechnen Sie die Gesamtfläche der 3 schraffierten Mönchchen über den Dreiecksseiten.



Lösung: (a) $U = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $A = \frac{\pi}{3}a^2$
 (b) $A_{\text{Mönche}} = \frac{3}{8}\pi a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\pi}{3}a^2$

17. (a) Begründen Sie mit einem bekannten Satz oder durch Rechnung: $2\alpha = \mu$
- (b) Zeigen Sie: Der Flächeninhalt des Sektors ABD ist doppelt so groß, wie der des Sektors AMC (Verwenden Sie dazu das obige Ergebnis.) und begründen Sie: $A_1 + A_3 = A_2$.

- (c) C gleitet auf dem Kreisumfang von A nach B . Zeichnen Sie die Figur für $\alpha = 45^\circ$ und im Sonderfall $\alpha = 90^\circ$. Erklären Sie das Ergebnis aus b) für diesen Fall.
- (d) Drücken Sie den Flächeninhalt des Segments A_4 mit Hilfe von A_2 , A_3 und r aus (vgl. Abb.) und zeigen Sie, dass $A_1 = A_4$ genau dann gilt, wenn $\alpha = 45^\circ$ ist.



- Lösung:* (a) Umfangswinkelsatz oder direkte Rechnung.
 (b) $A_{ABD} = 0.5 \cdot (2r)^2 \cdot \alpha$, $A_{AMC} = 0.5 \cdot r^2 \cdot 2\alpha$. Daraus ergibt sich $A_1 + A_2 + A_3 = 2A_2$.
 (c) Im Fall $\alpha = 90^\circ$ bedeutet dies: Der Viertelkreis um B hat die doppelte Fläche des Halbkreises um M .
 (d) Es ist $A_4 = \frac{\pi}{2}r^2 - A_2 - A_3$. Aus $A_1 = A_4$ ergibt sich $\pi r^2 = 2A_2$.

18. In einem Kreis mit dem Radius r überspannen zwei parallele Sehnen s_1 bzw. s_2 je einen Bogen zu den Zentriwinkeln 60° bzw. 90° so, dass der Kreismittelpunkt zwischen den beiden Sehnen liegt.
 Erstellen Sie eine übersichtliche Skizze und berechnen Sie dann die Größe des zwischen den beiden Sehnen liegenden Teils der Kreisfläche!

Lösung: $\frac{1}{12}r^2 \cdot (7\pi + 6 + 3\sqrt{3})$