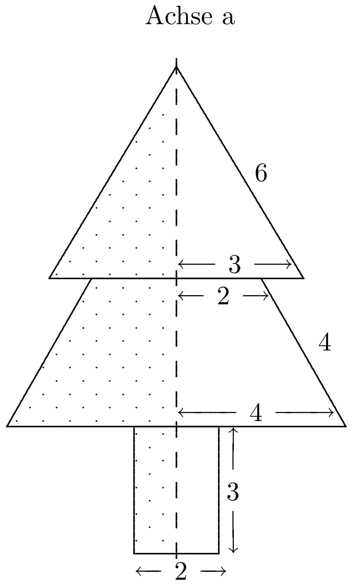
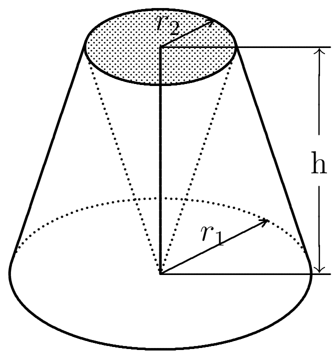
Kegelstumpf - Volumen und Oberfläche

1. Oh Tannenbaum!
   Das punktierte Flächenstück rotiert um die eingezeichnete Achse a. Die Längenangaben sind in cm. Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!
   Hinweis:
   Für einen Kegelstumpf mit den Radien r_1 und r_2, der Höhe h und der Mantellinie s gilt:
   $V_{KST} = \frac{1}{3}\pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)h$
   $M_{KST} = (r_1 + r_2)\pi s$



Lösung: $V = 160{,}0\,\text{cm}^3, \text{O} = 216{,}8\,\text{cm}^2$

2. In einen Kegelstumpf wird wie in der Abbildung ein kegelförmiger Krater gebohrt.
   (a) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers für beliebige Werte von r_1, r_2 und h.
   (b) Wir beschränken uns jetzt auf den Fall $r_1 = 2r_2$. Fertigen Sie eine Seitenansicht. Wie verhält sich der Flächeninhalt A des (Außen)-Mantels des Kegelstumpfs zum Flächeninhalt I des Kraters?



Lösung: (a) Bezeichnet man die Höhe des ursprünglichen Kegels mit H, so gilt $H = \frac{hr_1}{r_1 - r_2}$ und man erhält:
$V = \frac{1}{3}\pi r_1^2 H - \frac{1}{3}\pi r_2^2 (H - h) - \frac{1}{3}\pi r_2^2 h = \frac{1}{3}\pi(r_1 + r_2)hr_1.$

(b) $A = \frac{1}{2} 2\pi 2r_2 \cdot 2 \cdot \sqrt{h^2 + r_2^2} - \frac{1}{2} 2\pi r_2 \cdot \sqrt{h^2 + r_2^2}$ und $I = \frac{1}{2} 2\pi r_2 \cdot \sqrt{h^2 + r_2^2}$ ergibt $\frac{A}{I} = 3$

3. Ein (umgekehrt) kegelförmiges Glas von 10 cm Höhe und 5 cm Radius (Innenmaße) ist bis zur halben Höhe voller Saft.

   (a) Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie den Flächeninhalt der vom Saft benetzte Glasfläche.

   (b) Wie hoch steht der Saft im Glas, nachdem jemand eine Kirsche von 1 cm Radius in das Glas geworfen hat?

   (c) Wieviel Saft muss man nachgießen, damit das Glas (ohne Kirsche) halbvoll wird?

Lösung: (a) $\frac{\sqrt{5}\pi 5^2}{4}\text{cm}^2$
(b) $h = \sqrt[3]{141}\text{cm}$
(c) Ein Viertel des Glasvolumens: $\frac{250}{12}\pi\text{cm}^3$

4. Ein 10 cm hoher gerader Kegel soll parallel zu seiner Grundfläche durchgeschnitten werden, so dass der Flächeninhalt der Schnittfläche halb so groß wie der der Grundfläche ist.
   In welchem Abstand von der Grundfläche muss der Kegel durchgeschnitten werden?

Lösung: $h \approx 2{,}9\,\text{cm}$

5. Ein 10 cm hoher gerader Kegel soll parallel zu seiner Grundfläche durchgeschnitten werden, so dass die beiden entstehenden Körper gleiches Volumen besitzen.
   In welchem Abstand von der Grundfläche muss der Kegel durchgeschnitten werden?

Lösung: $h \approx 2{,}1\,\text{cm}$

6. Befördert man $2\,\text{m}^3$ Sand über ein feststehendes Förderband, so entsteht nach dem Abfallen ein kegelförmiger Sandhaufen von 92 cm Höhe.

   (a) Welchen Durchmesser hat die Grundfläche dieses Schüttkegels?
   Rundung des Ergebnisses auf cm!

   Wenn Sie (a) nicht lösen konnten, so rechnen Sie im folgenden mit einem Radius von 144 cm.

   (b) Ein Käfer krabbelt von der Spitze des Schüttkegels auf kürzestem Weg zu seiner Freundin, die auf dem Sandhaufen in halber Höhe über dem Boden (d.h. der Kegelgrundfläche) wartet.
   Welchen Weg (in cm) legt der Käfer zurück?

Lösung: (a): $288\,cm$ (b): $85\,cm$