Anwendungsaufgaben mit fächerübergreifenden Aspekten

1. Auf ein Konto wird an jedem Monatsersten, beginnend mit dem 1.1.2002, der konstante Betrag m einbezahlt, der jährliche Zinssatz sei z. Der fällige Zins wird am 31.12. des jeweiligen Jahres gutgeschrieben. Die einzelnen Raten werden dabei im Verhältnis zu ihrer tatsächlich auf dem Konto ruhenden Zeit berücksichtigt, der Zins für die Februar-Rate ist z.B. $Z_{\text{Februar}} = \frac{11}{12} \cdot z \cdot m$. Mit a_n bezeichnen wir den Kontostand nach n Jahren, d.h. am 31.12. im Jahre $2002 + n - 1$.
   Eine andere Bank schreibt den Zins an jedem Monatsletzten mit dem monatlichen Zinssatz $z_m = \frac{z^*}{12}$ gut, der Kontostand nach n Jahren sei hier b_n.
   Herr Traunicht spart seine zwölf Monatsraten im Sparstrumpf an und trägt sie erst am 31.12 zur Bank. Sein Kontostand am 31.12. im Jahre $2002+n-1$ sei c_n (jährlicher Zinssatz z).

   (a) Berechnen Sie zuerst a_1 und dann a_n! Verwenden Sie die Abkürzung $k = 1 + z$!

   (b) Berechnen Sie b_n unter Verwendung der Abkürzung $q = 1 + z_m$!

   (c) Berechnen Sie c_n!

   (d) Berechnen Sie a_{10}, b_{10} und c_{10} für $m = 1000$ € und $z = z^* = 6\%$!

   (e) Für welches z^* wäre $b_{10} = a_{10}$ $(z = 6\%)$? Numerische Lösung durch Probieren mit dem Taschenrechner!

Lösung: (a) $a_1 = 12\,m \left(1 + \frac{13}{24}\,z\right)$, $a_n = a_1 \sum\limits_{i=0}^{n-1} k^i = 12\,m \left(1 + \frac{13}{24}\,z\right) \frac{k^n - 1}{k - 1}$

(b) $b_n = m \sum\limits_{i=1}^{12\,n} q^i = m\,q\,\frac{q^{12\,n} - 1}{q - 1}$

(c) $c_n = 12\,m \sum\limits_{i=0}^{n-1} k^i = 12\,m\,\frac{k^n - 1}{k - 1}$

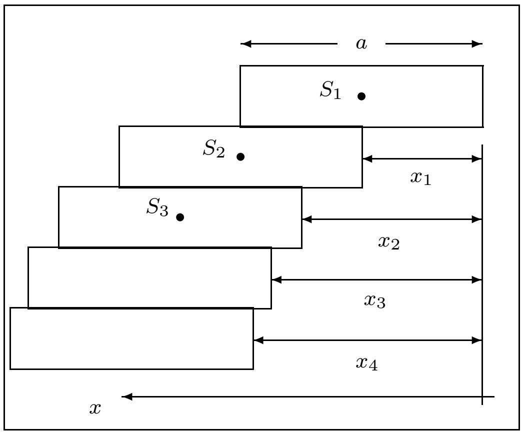
(d) $a_{10} = 163\,310{,}05$ €, $b_{10} = 164\,698{,}74$ €, $c_{10} = 158\,169{,}54$ €

(e) $q\,\frac{q^{120} - 1}{q - 1} = 163{,}31005\,;\; q = 1 + \frac{z^*}{12} = 1{,}0048718\,;\; z^* = 5{,}846\%$

2. Ein Konto wird monatlich mit dem Zinssatz z_m verzinst. Für welches z_m ist der Kontostand nach einem Jahr genauso groß wie bei jährlicher Verzinsung mit dem Zinssatz z? Wie groß ist z_m für $z = 6\%$?

Lösung: $a_0 \cdot (1 + z_m)^{12} = a_0 \cdot (1 + z)\,;\; z_m = \sqrt[12]{1 + z} - 1 = 0{,}4868\%$

3. Den maximalen Überhang x_n von $n+1$ lose übereinander gestapelten gleichen Quadern (Länge a, Masse m) erhält man durch folgende Überlegung: Der gemeinsame Schwerpunkt der n oberen Quader liegt genau über der rechten Kante des $(n{+}1)$-ten Quaders. Sind s_1 und s_2 die x-Koordinaten der Schwerpunkte von zwei Körpern der Massen m_1 und m_2, dann ist die x-Koordinate des gemeinsamen Schwerpunkts der beiden Körper



$$s = \frac{m_1\, s_1 + m_2\, s_2}{m_1 + m_2}$$

(a) Beweisen Sie: $\quad x_n = \frac{a}{2} \cdot h_n \quad$ mit $\quad h_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}$

h_n heißt **harmonische Reihe**.

(b) Die harmonische Reihe kann für $n = 2^r$ auf folgende Art geschrieben werden:

$$h_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{c_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{c_3} + \ldots\ldots = 1 + \sum_{k=1}^{r} c_k$$

mit den Teilsummen $\quad c_k = \sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{\nu}$. Beweisen Sie die Ungleichung $c_k \geq \frac{1}{2}$ und leiten Sie daraus eine Ungleichung für h_n ab! Welche Konsequenz hat diese Ungleichung für den maximalen Überhang x_n, wenn n immer größer gewählt wird? Für welches n zum Beispiel ist x_n **sicher** größer als $50\,a$?

(c) Berechnen Sie x_{10}! Ab welchem n ist $x_n > 2\,a$?

Lösung: (a) $x_{n+1} = \dfrac{n \cdot m \cdot x_n + m \cdot \left(x_n + \frac{a}{2}\right)}{(n+1)\, m} = x_n + \dfrac{a}{2\,(n+1)}$ und $x_1 = \dfrac{a}{2}$:

$$x_2 = x_1 + \frac{a}{4} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right), \quad x_3 = x_2 + \frac{a}{6} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \text{ u.s.w.}$$

(b) $c_k \geq \dfrac{2^k}{2} \cdot \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2}$, $x_{2^r} \geq \dfrac{a}{2}\left(1 + \dfrac{r}{2}\right) \to \infty$ wenn $n = 2^r \to \infty$

$$x_{2^r} \geq \frac{a}{2}\left(1 + \frac{r}{2}\right) > 50\,a \implies r > 198 \implies n > 2^{198} = 4{,}017 \cdot 10^{59}$$

(c) $x_{10} = 1{,}464 \cdot a$, $x_{30} = 1{,}997 \cdot a$, $x_{31} = 2{,}014 \cdot a$; ab $n = 31$

4. Ein Gummiball fällt zur Zeit $\tau = 0$ aus der Höhe h_1 auf den Boden und erreicht bei jedem Sprung 81% seiner vorhergehenden Höhe. Die Zeitdauer für den Fall aus

der Höhe h_ν bzw. für den Sprung vom Boden bis zur Höhe h_ν ist $t_\nu = \sqrt{\frac{2\,h_\nu}{g}}$ mit $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folgen h_ν bzw. t_ν geometrisch sind und geben Sie jeweils den Quotienten an!

(b) Der Zeitpunkt des n-ten Aufpralls auf dem Boden sei τ_n, der gesamte vom Ball zurückgelegte Weg bis zum n-ten Aufprall sei s_n. Drücken Sie s_n durch h_1 und τ_n durch t_1 aus! Welche Werte können von s_n bzw. τ_n nie überschritten werden, auch wenn n noch so groß wird?

(c) Berechnen Sie s_n und τ_n für $h_1 = 1\,\mathrm{m}$ und $n \in \{10; 20; 100; 1000\}$! An welche Grenzwerte nähern sich h_n und τ_n an, wenn n immer größer wird?

Lösung: (a) $h_{\nu+1} = 0{,}81\,h_\nu$; $h_\nu = h_1 \cdot 0{,}81^{\nu-1}$, $t_\nu = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h_\nu} = t_1 \cdot 0{,}9^{\nu-1}$

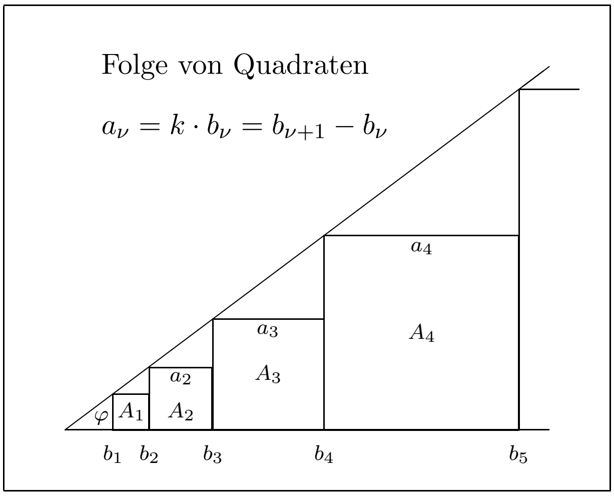
(b) $$s_n = 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu - h_1 = h_1 \cdot \left(2 \cdot \frac{1 - 0{,}81^n}{0{,}19} - 1\right) < \frac{181}{19}\,h_1$$

$$\tau_n = 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu - t_1 = t_1 \cdot [20\,(1 - 0{,}9^n) - 1] < 19\,t_1$$

(c)

n	10	20	100	1000	∞
s_n in m	8,247	9,371	9,526	9,526	9,526
τ_n in s	5,430	7,481	8,5787	8,5789	8,5789

5. Nebenstehende Abbildung zeigt eine Folge von Quadraten mit den Kantenlängen a_ν und den Flächeninhalten A_ν. Die Quadrate werden von zwei Geraden eingeschlossen, die sich unter dem Winkel φ schneiden. Mit F_n bezeichnen wir die Gesamtfläche der ersten n Quadrate, mit U_n den Umfang der von den ersten n Quadraten gebildeten, treppenartigen Figur.



(a) Zeigen Sie, dass die Folgen der b_ν, a_ν und A_ν geometrisch sind und berechnen Sie die Quotienten der drei Folgen in Abhängigkeit von k (siehe Abbildung)!

(b) Drücken Sie F_n und U_n durch a_1 und k aus!

(c) Berechnen Sie F_{50} und U_{50} für $a_1 = 1\,\text{cm}$ und $\varphi = 45°$! Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der Oberfläche und dem Umfang der Erde (Erdradius: $R = 6370\,\text{km}$)!

(d) Lösen Sie Teilaufgabe (c) für $\varphi = 30°$!

Lösung: (a) $b_{\nu+1} = b_\nu \cdot (1+k)$, $a_{\nu+1} = a_\nu \cdot (1+k)$, $A_{\nu+1} = A_\nu \cdot (1+k)^2$

(b) $F_n = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu = a_1^2 \cdot \dfrac{(1+k)^{2n}-1}{(1+k)^2-1}$

$U_n = 2 \cdot (b_{n+1} - b_1) + 2\,a_n = 2\,a_1 \cdot \left(\dfrac{(1+k)^n - 1}{k} + (1+k)^{n-1} \right)$

(c) $k = \tan 45° = 1$, $F_{50} = 4{,}23 \cdot 10^{19}\,\text{km}^2 = 8{,}29 \cdot 10^{10} \cdot A_{\text{Erde}}$

$U_{50} = 3{,}38 \cdot 10^{10}\,\text{km} = 8{,}44 \cdot 10^5 \cdot U_{Erde}$

(d) $k = \tan 30° = 0{,}577$, $F_{50} = 4{,}17 \cdot 10^9\,\text{km}^2 = 8{,}18 \cdot A_{\text{Erde}}$

$U_{50} = 3{,}73 \cdot 10^5\,\text{km} = 9{,}32 \cdot U_{Erde}$

6. Setzt man beim Roulette auf einfache Chancen (z.B. rot-schwarz), dann erhält man bei einem Treffer den doppelten Einsatz zurück, d.h. der Gewinn ist gleich dem Einsatz. Beim **Martingale-System** verdoppelt man nach jedem verlorenen Spiel den Einsatz. Den Einsatz im ersten Spiel einer Verlust-Verlust-... -Gewinn-Serie bezeichnen wir mit a_1.

(a) Welchen Gewinn G erzielt man in einer Spielserie, bei der man n-mal hintereinander verliert und das $(n+1)$-te Spiel gewinnt?

(b) Wieviel Geld muss man dabei haben, wenn man bei $a_0 = 100\,€$ siebenmal hintereinander verliert und das Spiel trotzdem fortsetzen möchte?

(c) Lösen Sie die Teilaufgaben (a) und (b) für ein Vervierfachen des Einsatzes nach jedem Verlust!

Warnung!! Mit dem Martingale-System kann man auf Dauer nicht gewinnen, da die Spielbanken Höchsteinsätze festlegen. Man kann zwar viele kleine Gewinne erzielen, aber es kommt unweigerlich der Augenblick, bei dem man wegen des Höchsteinsatzes nicht mehr verdoppeln kann und auf einen Schlag viel verliert! Die Gewinnquoten sowie die Mindest- und Höchsteinsätze sind so aufeinander abgestimmt, dass man auf lange Zeit gesehen immer verliert, ganz gleich nach welchem System man spielt!

Lösung: (a) Einsatz beim k-ten Spiel: $a_k = a_1 \cdot 2^{k-1}$

$G = a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1$

(b) $a_1 \cdot \sum_{k=1}^{8} 2^{k-1} = 25\,500\,€$

(c) Einsatz beim k-ten Spiel: $\quad a_k = a_1 \cdot 4^{k-1}$

$$G = a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \frac{2 \cdot 4^n + 1}{3}$$

$$a_1 \cdot \sum_{k=1}^{8} 4^{k-1} = 2\,184\,500\,€$$