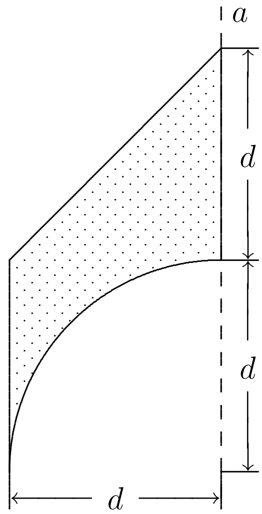
Rotationskörper ohne Kegelstümpfe

1. Durch Rotation der schraffierten Fläche um die Achse a entsteht ein Rotationskörper (runder Turm mit halbkugelförmigem Innenraum).

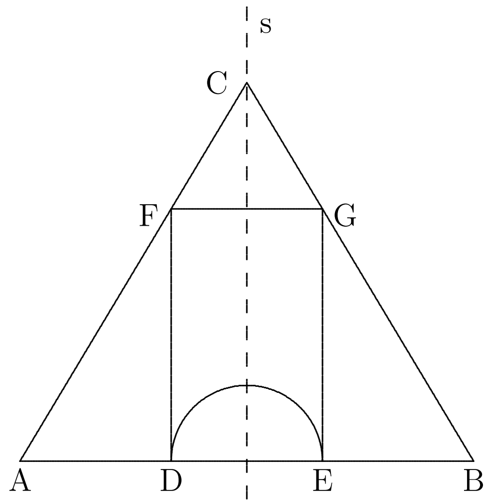
   (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche in Abhängigkeit von d.

   (b) Berechnen Sie den Rauminhalt des Rotationskörpers in Abhängigkeit von d. Das Ergebnis soll möglichst weit vereinfacht werden.



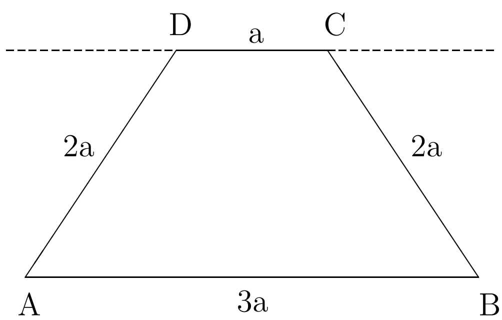
Lösung: $A = \sqrt{2}\pi d^2$ und $V = \frac{2}{3}\pi d^3$

2. Aus dem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge $2a$ werde die Figur $DEFG$ mit dem Halbkreisbogen DE herausgestanzt. Das restliche Flächenstück rotiere um die Achse s. Ferner gilt $\overline{CG} = \frac{2}{3}a$.
   Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers in Abhängigkeit von a und stellen Sie das Ergebnis in möglichst einfacher Form dar!



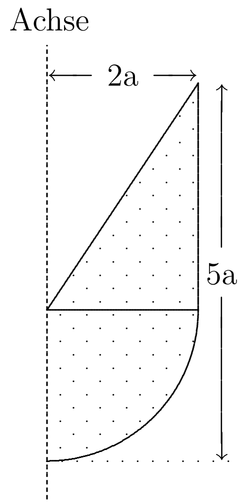
Lösung: Strahlensatz!
$V_{Rot} = \frac{1}{81}a^3\pi \cdot \left(21\sqrt{3} + 2\right)$

3. Das Trapez ABCD in nebenstehender Skizze rotiert um die Achse DC. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche des entstehenden Rotationskörpers!



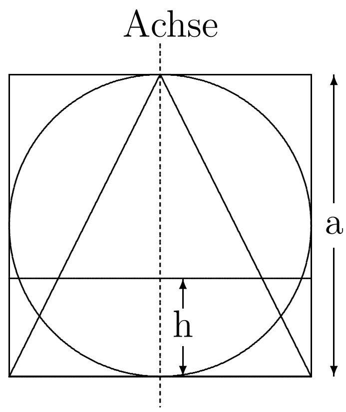
Lösung: $V = 7a^3\pi;\ O = 10\sqrt{3}a^2\pi$

4. Berechnen Sie die Gesamtoberfläche des Rotationskörpers in Abhängigkeit von a und π!



Lösung: $O = a^2\pi(20 + 2\sqrt{13})$

5. Einem Quadrat sind ein Kreis und ein gleichschenkliges Dreieck einbeschrieben. Diese Figur dreht sich um die Symmetrieachse (vgl. Zeichnung).



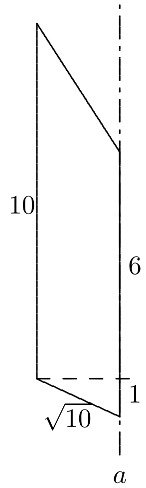
   (a) Berechnen Sie jeweils das Volumen der drei dabei entstehenden Körper sowie den Oberflächeninhalt des Kegels!

   (b) Aus dem Zylinder wird die Kugel herausgeschnitten. Wie groß ist der Radius R einer anderen Kugel, die denselben Rauminhalt wie der Restkörper hat?

   (c) Die drei Körper werden in der Höhe h über der Grundfläche von einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten. Wie groß sind die Flächeninhalte von „Kegelkreis “und „Kugelkreis “?

Lösung: (a) $V_{Zy} = \frac{1}{4}\pi a^3; V_{KU} = \frac{1}{6}\pi a^3; V_{Ke} = \frac{1}{12}\pi a^3; O_{Ke} = \frac{1}{4}\pi a^2(\sqrt{5} + 1)$
(b) $\sqrt[3]{\frac{1}{16}a^3}$
(c) $A_{Ke} = (\frac{a-h}{2})^2\pi; A_{Ku} = (ah - h^2)\pi$

6. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Körpers, der entsteht, wenn die Figur um die Achse a rotiert!

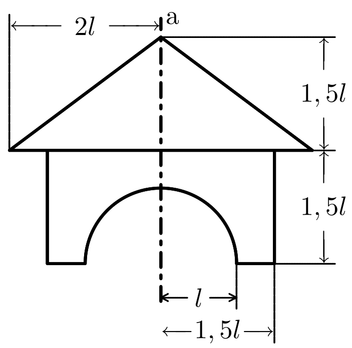


Lösung: $O = (75 + 3\sqrt{10}) \cdot \pi$

7. Die nebenstehende Figur rotiert um die Achse a. Bestimmen Sie für den Rotationskörper

   (a) das Volumen V

   (b) die Oberfläche O



Lösung: (a) $V = \frac{1}{3}(2l)^2\pi \cdot 1{,}5l + (1{,}5l)^2\pi \cdot 1{,}5l - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi l^3 = \frac{113}{24}\pi l^3$

(b) Länge der Mantellinie: $m = 2{,}5l$.
Oberfläche:
$O = \frac{1}{2}m \cdot 2\pi \cdot 2l + 1{,}5l \cdot 2\pi \cdot 1{,}5l + (\pi(2l)^2 - \pi l^2 + \frac{1}{2}4\pi l^2 = 14{,}5\pi l^2$