Reduktionsformeln für Winkelfunktionen

1. Berechnen Sie $\tan\varphi$ ohne Taschenrechner, wenn $|\cos\varphi| = \frac{10}{26}$ und $\varphi \in [90^o; 180^o]$.

   Lösung: $-2{,}4$

2. Für welche Winkel φ gilt: $\varphi \in [0^o; 360^o]$ und $\cos\varphi = -\sin\varphi$

   Lösung: 135^o und 315^o

3. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$2\cos 217° + \cos 397° - \sin 307° = 0$$

   Anleitung: Führen Sie die auftretenden Winkelfunktionen auf solche mit Argumenten zwischen 0 und 90 Grad zurück. Eine Berechnung mit Näherungswerten (Taschenrechner!) gilt nicht als Beweis.

   Lösung:

4. Bestimmen Sie über der Grundmenge $[0°; 360°[$ die Lösungsmenge und stellen Sie sie im Einheitskreis (1 Längeneinheit $\widehat{=}$ 2 cm) graphisch dar: $|\cos\varphi| \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   Lösung: $\mathbb{L} = \{\varphi|\, 0° \leq \varphi \leq 30° \text{ oder } 150° \leq \varphi \leq 210° \text{ oder } 330° \leq \varphi < 360°\}$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in der Grundmenge $[0°; 360°[$:

$$(1 + 2 \cdot \sin 2\varphi) \cdot (\tan\varphi - 1) = 0$$

   Lösung: $\mathbb{L} = \{45°; 105°; 165°; 225°; 285°; 345°\}$

6. (a) Beweisen Sie: $\sin 1000° = \sin 10000° = \sin 100000°$.

   (b) Welches allgemeine Gesetz läßt sich aufgrund von Teilaufgabe (a) vermuten? Beweisen Sie dieses Gesetz!

   Lösung: (a) $\sin 10000° = \sin(25 \cdot 360° + 1000°) = \sin 1000°$

   $\sin 100000° = \sin(11 \cdot 25 \cdot 360° + 1000°) = \sin 1000°$

   (b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 4$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(10^n)° &= \sin(99...9000° + 1000°) = \\ &= \sin(11...1 \cdot 25 \cdot 360° + 1000°) = \sin 1000° \end{aligned}$$

7. Bestimmen Sie im Intervall $[0^o; 360^o]$ bzw. $[0; 2\pi]$ die Winkel im Grad- und Bogenmaß (auf eine Dezimale genau), für welche gilt: $\cos x = -0{,}3759$

Lösung: 112,1^o; 247,9^o; 2,0; 4,3

8. <u>Beweise</u>: Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ gilt $\sin{(4 \cdot 10^n)}^\circ = \sin{(4 \cdot 10^{n-1})}^\circ$!

   Für welche Winkel $\varphi \in [0\,; 360^\circ[$ gilt $\sin\varphi = \sin{(4 \cdot 10^{13})}^\circ$?

Lösung: $\delta = 4 \cdot 10^n - 4 \cdot 10^{n-1} = 360 \cdot 10^{n-2}$ ist für $n \geq 2$ ein ganzzahliges Vielfaches von 360.

$\sin(4 \cdot 10^{13})^\circ = \sin 40^\circ \quad ; \quad \varphi_1 = 40^\circ \quad ; \quad \varphi_2 = 140^\circ$

9. (a) Zeigen Sie, dass es für einen beliebigen im Gradmaß gemessenen Winkel φ einen Winkel $\psi \in [0^\circ; 360^\circ[$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi = 360^\circ \cdot k + \psi$$

   (b) Begründen Sie kurz, warum in der Situation von Teilaufgabe a) gilt:

$$\sin\varphi = \sin\psi$$

   (c) Geben Sie in der Situation von Teilaufgabe a) jeweils für $\psi \in [90^\circ; 180^\circ[$, $\psi \in [180^\circ; 270^\circ[$ und $\psi \in [270^\circ; 360^\circ[$ denjenigen spitzen Winkel ω an, dessen Sinus bis auf das Vorzeichen mit $\sin\psi$ übereinstimmt. Welcher Zusammenhang besteht jeweils zwischen $\sin\omega$ und $\sin\psi$?

Lösung: (a) Division von φ durch 360° mit Rest

(b) Periodizität des Sinus

(c) $\psi \in [90^\circ; 180^\circ[$: $\quad \sin\psi = \sin\omega, \quad \omega = 180^\circ - \psi$

$\psi \in [180^\circ; 270^\circ[$: $\quad \sin\psi = -\sin\omega, \quad \omega = \psi - 180^\circ$

$\psi \in [270^\circ; 360^\circ[$: $\quad \sin\psi = -\sin\omega, \quad \omega = 360^\circ - \psi$

10. (a) Zeigen Sie, dass es für einen beliebigen im Gradmaß gemessenen Winkel φ einen Winkel $\psi \in [0^\circ; 360^\circ[$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi = 360^\circ \cdot k + \psi$$

   (b) Begründen Sie kurz, warum in der Situation von Teilaufgabe a) gilt:

$$\cos\varphi = \cos\psi$$

   (c) Geben Sie in der Situation von Teilaufgabe a) jeweils für $\psi \in [90^\circ; 180^\circ[$, $\psi \in [180^\circ; 270^\circ[$ und $\psi \in [270^\circ; 360^\circ[$ denjenigen spitzen Winkel ω an, dessen Kosinus bis auf das Vorzeichen mit $\cos\psi$ übereinstimmt. Welcher Zusammenhang besteht jeweils zwischen $\cos\omega$ und $\cos\psi$?

Lösung: (a) Division von φ durch $360°$ mit Rest
(b) Periodizität des Kosinus
(c) $\psi \in [90°; 180°[$: $\cos\psi = -\cos\omega$, $\omega = 180° - \psi$
$\psi \in [180°; 270°[$: $\cos\psi = -\cos\omega$, $\omega = \psi - 180°$
$\psi \in [270°; 360°[$: $\cos\psi = \cos\omega$, $\omega = 360° - \psi$

11. (a) Zeigen Sie, dass es für einen beliebigen im Gradmaß gemessenen Winkel φ einen Winkel $\psi \in [0°; 180°[$ und ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass gilt:

$$\varphi = 180° \cdot k + \psi$$

Für welche Winkel φ ist $\tan\varphi$ nicht definiert?

(b) Begründen Sie kurz, warum in der Situation von Teilaufgabe a) gilt:

$$\tan\varphi = \tan\psi$$

(c) Geben Sie in der Situation von Teilaufgabe a) für $\psi \in]90°; 180°[$ denjenigen spitzen Winkel ω an, dessen Tangens bis auf das Vorzeichen mit $\tan\psi$ übereinstimmt. Welcher Zusammenhang besteht jeweils zwischen $\tan\omega$ und $\tan\psi$?

Lösung: (a) Division von φ durch $180°$ mit Rest; $\varphi = 90° \cdot (2l + 1)$, $l \in \mathbb{Z}$
(b) Periodizität des Tangens
(c) $\tan\psi = -\tan\omega$ mit $\omega = 180° - \psi$

12. Zeichnen Sie einen Kreis mit Radius 5 cm. Dieser Kreis sei der Einheitskreis.

(a) Bestimmen Sie mit größtmöglicher Genauigkeit $\sin 40^o$ und $\cos 40^o$ und berechnen Sie daraus $\tan 40^o$.

(b) Bestimmen Sie mit größtmöglicher Genauigkeit den Winkel β im I. Quadranten so, dass $\sin\beta = 0{,}8$.

(c) Veranschaulichen Sie die Gleichung $\sin 230^o = \sin 310^o$. Welche allgemeine Formel liegt dieser Gleichung zugrunde?

Lösung: zu (c): $\sin\varphi = -\sin(\varphi + 180^o) = -\sin(360^o - \varphi)$ für $0^o < \varphi < 90^o$

13. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$\text{Für } 270^o < \alpha < 360^o \text{ gilt: } \sin\alpha = -\sin(360^o - \alpha)$$

Lösung:

14. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$\text{Für } 180^o < \alpha < 270^o \text{ gilt: } \cos\alpha = -\cos(\alpha - 180^o)$$

Lösung:

15. Begründen Sie anhand des Einheitskreises:

$$\text{Für } 270^o < \alpha < 360^o \text{ gilt: } \tan\alpha = -\tan(360^o - \alpha)$$

Lösung:

16. Begründen Sie anhand einer Zeichnung:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Lösung: