Funktionsterme, Graphen, Umkehrfunktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f : x \longmapsto x^{-2}$

   (a) Fertigen Sie eine sorgfältige Zeichnung des Graphen dieser Funktion an. (Einheit 1 cm auf beiden Achsen, mindestens 4 Punkte pro Kurvenast.)

   (b) Berechnen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert kleiner als $\frac{1}{2}$ ist?

   (c) Berechnen Sie die x-Werte, für die der Funktionswert größer als 1 ist?

   Lösung: (b) $x < -\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2} < x$ (c) $-1 < x < 0$ oder $0 < x < 1$

2. Gegeben sei die Funktion $f : x \longmapsto \frac{1}{10}x^{-3} + 2$

   (a) Übertragen Sie die folgende Wertetabelle auf Ihr Arbeitsblatt und berechnen Sie die fehlenden y-Werte:

x	-3	-1	$-0{,}5$	$-0{,}3$	$-0{,}2$
y					

   (b) Zeichnen Sie den Graphen mit Hilfe der in (a) berechneten Werte. (1 Längeneinheit = 1 cm)

   (c) Berechnen Sie die fehlende Koordinate des Punktes $Q(\,?\,|-2{,}45)$ so, dass er auf dem Graphen liegt (3 geltende Ziffern).

   Lösung: (a) 2,0; 1,9; 1,2; −1,7; −10,5 (c) −0,282

3. Gegeben sind die Funktionen $f : x \longmapsto \frac{1}{3} \cdot x^2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g : x \longmapsto -3 \cdot x^{-1}$ mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (a) Legen Sie jeweils für $x = 1{,}2, 3{,}4$ eine Wertetabelle an und zeichnen Sie ohne weitere Rechnung die Graphen beider Funktionen im Intervall $[-4; 4]$ in ein Koordinatensystem (Längeneinheit: 1 cm) ein. Welche Eigenschaften der Funktionen f und g verwenden Sie dabei?

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S beider Funktionsgraphen!

   Lösung: (a): Symmetrieeigenschaften; (b): $S\left(-3^{\frac{2}{3}} \mid 3^{\frac{1}{3}}\right)$

4. (a) Bestimmen Sie c und n so, dass die Punkte $P(-1|-0{,}5)$ und $Q(2|4)$ auf dem Graphen der Funktion $f(x) = c \cdot x^n$ liegen.

   (b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ für $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ in ein Koordinatensystem (Schrittweite für die x-Koordinaten der Punkte: 0,5).

(c) Spiegeln Sie den Graphen an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten und geben Sie für $x \geq 0$ die Funktion an, die zum gespiegelten Graph gehört.

(d) Geben Sie für $x \leq 0$ die Funktion an, die zum gespiegelten Graph gehört.

Lösung: (a) $c = 0{,}5$; $n = 3$

5. Skizzieren Sie die Graphen folgender Potenzfunktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem:

$f_1: \quad x \longmapsto -x^3$

$f_2: \quad x \longmapsto (x+3)^4 - 2$

$f_3: \quad x \longmapsto -(x-4)^3 + 1$

und geben Sie jeweils deren Definitions- und Wertemenge an!

Lösung: $\mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{D}_{f_3} = \mathbb{R}$; $\quad \mathbb{W}_{f_1} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W}_{f_2} = [-2; \infty[$; $\mathbb{W}_{f_3} =]-\infty; 1]$

6. Gegeben ist die Funktion f: $x \mapsto 7 \cdot x^{-\frac{2}{5}}$.

   (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an!

   (b) Geben Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion g dieser Funktion an!

   (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von f und g!

Lösung: a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ b) $y = (\frac{1}{7}x)^{-\frac{5}{2}}$ c) $S(\sqrt[7]{7^5} | \sqrt[7]{7^5})$

7. Gegeben ist die Funktion f: $x \mapsto (3x)^{\frac{3}{5}}$.

   (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an!

   (b) Für welche x-Werte sind die Funktionswerte kleiner bzw. größer als die x-Werte?

   (c) Geben Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion g dieser Funktion an!

Lösung: a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ b) kleiner für $x > \sqrt{27}$, größer für $0 < x < \sqrt{27}$ c) $y = \frac{1}{3}x^{\frac{5}{3}}$

8. Gegeben sind die beiden Potenzfunktionen

$f_1: \; x \longmapsto a \cdot x^{-\frac{2}{3}} - 1$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ sowie $f_2: \; x \longmapsto x^{-\frac{4}{3}} - 5$

jeweils mit maximaler Definitionsmenge.

   (a) Geben Sie für f_1 und f_2 jeweils Definitions- und Wertemenge ohne Begründung an!

(b) Geben Sie für die Funktion f_2 die Funktionswerte für $x = \frac{1}{3}; 3; 5; 7$ auf 2 Dezimalen gerundet an und zeichnen Sie dann den Graphen von f_2 in ein Koordinatensystem ein!

(c) Bestimmen Sie für die Funktion f_1 den Wert von a so, dass der Punkt $P(8|-0{,}25)$ auf dem Graphen liegt!

Ab jetzt sei $a = 3$ gesetzt!

(d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Funktionsgraphen!

Lösung: (a) $\mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{R}^+$; $\mathbb{W}_{f_1} =]-\infty; -1[$ falls $a < 0$; $\mathbb{W}_{f_1} =]-1; \infty[$ falls $a > 0$;
$\mathbb{D}_{f_2} = \mathbb{R}^+$; $\mathbb{W}_{f_2} =]-5; \infty[$
(b) $-0{,}67;\ -4{,}77;\ -4{,}88;\ -4{,}93$
(c) $a = 3$
(d) $S\left(\frac{1}{8}|11\right)$

9. Gegeben sind die beiden Potenzfunktionen $p_1 : x \longmapsto x^{-\frac{2}{3}}$ und $p_2 : x \longmapsto x^{\frac{2}{3}}$ jeweils mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$.

(a) Erstellen Sie für $x = \frac{1}{4}, 1, 3, 8$ eine Wertetabelle für beide Funktionen und zeichnen Sie dann die Graphen in ein Koordinatensystem ein!
(Längeneinheit: 1 cm)

Nun werden die Funktionen $f_1 : x \longmapsto x^{-\frac{2}{3}} - 2$ und $f_2 : x \longmapsto 2 \cdot x^{\frac{2}{3}} - 1$ jeweils mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ betrachtet.

(b) Zeichnen Sie unter Beachtung von Teilaufgabe a) die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 in ein neues Koordinatensystem ein! (Längeneinheit: 1 cm)

(c) Geben Sie die Wertemengen beider Funktionen an!

(d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen von f_1 und f_2!

Lösung: (c) $\mathbb{W}_{f_1} =]-2; \infty[$; $\mathbb{W}_{f_2} =]-1; \infty[$
(d) Substitution, quadratische Gleichung; $S\left(2^{-1{,}5} \mid 0\right)$

10. Gegeben ist die Funktion f: $x \mapsto 3 \cdot x^{-\frac{2}{3}}$.

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an!

(b) Die Punkte $P(8|y_P)$ und $Q(x_Q|6)$ liegen auf dem Graphen dieser Funktion. Bestimmen Sie y_P und x_Q zunächst exakt und dann auf eine Dezimale gerundet.

(c) Für welche x-Werte sind die Funktionswerte kleiner bzw. größer als die x-Werte?

(d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit Hilfe der Ergebnisse aus a), b) und c) ohne weitere Werte zu berechnen!

(e) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion g und skizzieren Sie deren Graphen in obiges Koordinatensystem ohne eine Wertetabelle zu erstellen!

Lösung: a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
b) $y_P = 0{,}75 \approx 0{,}8$; $x_Q = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}4$
c) kleiner für $x > \sqrt[5]{27}$, größer für $0 < x < \sqrt[5]{27}$
e) $y = (\frac{1}{3}x)^{-\frac{3}{2}}$

11. Gegeben ist die Funktion $y = a \cdot x^{-\frac{3}{2}} + b\,, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ mit maximaler Definitionsmenge.

(a) Bestimmen Sie Definitionsmenge und Wertemenge dieser Funktion!

(b) Bestimmen Sie a und b so, dass die Punkte $P(1|-1)$ und $Q(4|-2{,}75)$ auf dem Graphen liegen!

Nun sei $y = 2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} - 3$.

(c) Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion! (Längeneinheit: 1 cm)

(d) Dieser Graph wird nun an der x-Achse gespiegelt. Wie lautet die Funktionsgleichung des gespiegelten Graphen?

Lösung: (a) $a > 0: \ \mathbb{D} = \mathbb{R}^+, \ \mathbb{W} =]b; \infty[; \qquad a < 0: \ \mathbb{D} = \mathbb{R}^+, \ \mathbb{W} =]-\infty; b[$
(b) $a = 2; \ b = -3$
(d) $y = -2x^{-\frac{3}{2}} + 3$

12. Bestimmen Sie mit Hilfe einer sauberen und übersichtlichen Zeichnung (<u>ein</u> Koordinatensystem genügt!) die <u>Zahl</u> der Lösungen folgender Gleichung über $\mathbb{G} = \mathbb{R}$:

$$\sqrt[3]{x+2} = \frac{1}{x^2} - 1$$

Lösung: $|\mathbb{L}| = 2$