Reihenentwicklung

1. Führen Sie folgende Division weiter aus:

$$\frac{1}{1+x} = \begin{array}{l} 1 : (1+x) = 1 - x + x^2 \,.... \\ \underline{1+x} \\ \quad -x \\ \quad \underline{-x - x^2} \\ \qquad\quad +x^2 \\ \qquad\quad ..... \end{array}$$

   (a) Das Ergebnis der Division ist eine Summe mit unendlich vielen Summanden (unendliche Reihe). Der Wert dieser Summe ist nur für x mit $|x| < 1$ definiert. Überprüfen Sie diese Aussage für $x = 0{,}1$ und $x = 2$!

   (b) Ist der Betrag von x sehr klein gegen 1 ($|x| \ll 1$), dann kann man in der Reihe die höheren Potenzen von x vernachlässigen und erhält folgende Näherungen:

$$\boxed{\frac{1}{1+x} \approx 1 - x} \qquad \boxed{\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2}$$

lineare Näherung — quadratische Näherung

   Berechnen Sie den relativen Fehler der beiden Näherungen für $x = 0{,}1$ und $x = 0{,}005$!

   (c) Um Näherungsformeln für $\sqrt{1+x}$ zu finden, quadriert man den Ansatz $\sqrt{1+x} \approx 1 + a\,x + b\,x^2$, vernachlässigt alle Summanden ab der dritten Potenz und bestimmt dann a und b durch Koeffizientenvergleich. Wie lautet die lineare und die quadratische Näherung für $\sqrt{1+x}$ ($|x| \ll 1$)? Berechnen Sie den relativen Fehler der Näherungen für $x = 0{,}02$!

   (d) Wie lauten die Näherungsformeln (linear und quadratisch) für $\dfrac{1}{1-x}$ und $\sqrt{1-x}$? Leiten Sie daraus die lineare Näherung für $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ her!

   (e) Eine Atomuhr A wird mit der Geschwindigkeit $v = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von einer Uhr B zu einer 300 km entfernten Uhr C bewegt, die Uhren B und C zeigen für diesen Vorgang die Zeitdauer t an. Nach Einstein misst A für den gleichen Vorgang die Zeit $t' = t \cdot \sqrt{1-\beta^2}$ mit $\beta = \frac{v}{c}$ und der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Berechnen Sie $\Delta t = t - t'$ mit der linearen Näherung! Versuchen Sie die Berechnung auch ohne Näherungsformel mit dem Taschenrechner!

   (f) Einstein leitete für die kinetische Energie die Formel $W = m\,c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$ her. Weisen Sie nach, dass diese Formel in linearer Näherung mit der klassischen Formel $W = \frac{m}{2}\,v^2$ übereinstimmt!

Lösung: (a) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \mp ....$

(b) linear: -1%, $-0{,}0025\%$; quadratisch: $0{,}1\%$, $0{,}000125\%$

(c) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

linear: $0{,}0049\%$; quadratisch: $-0{,}000049\%$

(d) $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2$; $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$; $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$

(e) $\Delta t \approx \frac{s}{v} \cdot \frac{\beta^2}{2} = 5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}$