Logarithmusfunktionen

1. Wir untersuchen die Funktion$f : x \longmapsto \log_2 x$

   (a) Zeichnen Sie zunächst den Graphen der Umkehrfunktion von f und entwickeln Sie daraus den Graphen von f im Intervall $[0; 8]$ (Einheit 1 cm).

   (b) Wie erhält man daraus geometrisch den Graphen von $x \longmapsto \log_{\frac{1}{2}} x$? Zeichnung und algebraische Begründung!

   (c) Bestimmen Sie graphisch $\log_2 5$.

   Lösung: (a) Zeichnung mit Hilfe ganzzahliger Werte von $y = 2^x$. Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

   (b) Spiegelung an der x-Achse

   (c) 2,32

2. (a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \log_3 x$ in $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$ unter Zuhilfenahme des Graphen einer geeigneten Exponentialfunktion g. Geben Sie die Funktionsgleichung von g an!

   (b) Die Punkte $A(9|y_A)$, $B(x_B|\frac{1}{2})$ und $C(5|y_C)$ liegen auf G_f. Geben Sie die fehlenden Koordinaten zunächst exakt und dann auf zwei Dezimalen gerundet an!

   (c) Für welche x-Werte sind die Funktionswerte von f größer als 5?

   Lösung: $g(x) = 3^x$; $y_A = 2$; $x_B = \sqrt{3} \approx 1{,}73$; $y_C = \log_3 5 \approx 1{,}46$; $x > 243$

3. Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

   $f(x) = \lg(x^2 + 1)$ in ihrem maximalen Definitionsbereich.

   (a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und die Wertemenge der Funktion f an! (Begründung!)

   (b) Fertigen Sie eine saubere Zeichnung des Funktionsgraphen G_f im Bereich $0 \leq x \leq 7$! (Einheit auf beiden Achsen: 1cm)
   Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle für $x \in \{0; 1; 2; ...; 7\}$

   (c) Für welchen Wert von a $(a > 0)$ hat der Graph der Funktion $g(x) = \lg(ax)$ mit G_f nur <u>einen</u> gemeinsamen Punkt?

   Lösung: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$; $a = 2$

4. Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen

$$y = \log_2 x \qquad \text{und} \qquad y = \log_{\frac{1}{2}} x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

in ein Koordinatensystem.
Beweisen Sie anschließend: $\log_a x + \log_{\frac{1}{a}} x = 0$

Lösung: $\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = -\log_a x$

5. Bestimmte Logarithmuskurven liegen symmetrisch zueinander.

   (a) Um welche Art von Symmetrie handelt es sich?

   (b) Geben Sie ein Beispiel dafür an. Wie lautet der allgemeine Zusammenhang zwischen den Funktionstermen zweier solcher Kurven?

Lösung: (a) Symmetrie zur x-Achse
(b) $\log_b x$ und $\log_{\frac{1}{b}} x$

6. (a) Bestimmen Sie a und b so, dass sich die Graphen der Funktionen mit den Funktionsgleichungen $y = a^x$ und $y = \log_b x$ im Punkt $P(3|8)$ schneiden.

   (b) Bestimmen Sie jeweils die Umkehrfunktion und geben Sie einen Schnittpunkt der Graphen der Umkehrfunktionen an.

   (c) Welche Bedingung muss eine Funktion erfüllen, damit sie umkehrbar ist? (Ohne Begründung!)

Lösung: (a) $a = 2; \quad b = 3^{\frac{1}{8}} \approx 1{,}1472$
(b) $\text{y} = \log_2 x$; $\quad \text{y} = (\sqrt[8]{3})^x; \quad Q(8|3)$
(c) Jedem x-Wert darf höchstens ein x-Wert zugeordnet sein.

7. In dieser Aufgabe untersuchen wir die allgemeine Logarithmusfunktion

$$f(x) = A \cdot \log_B(C\,x + D) + E$$

   (a) Beweisen Sie, dass $f(x)$ in der Form

$$g(x) = a\ \lg(x + b) + c$$

   dargestellt werden kann und drücken Sie die Konstanten a, b und c durch A, B, C, D und E aus!

   (b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \lg 8 \cdot \log_2(100\,x + 500) - 5$ nach Umformung wie in Teilaufgabe (a)! Wie geht der Graph von f aus dem Graphen von $f_0(x) = 3\ \lg x$ hervor? Berechnen Sie die Nullstelle von f!

(c) Ermitteln Sie die Gleichung der allgemeinen Logarithmusfunktion f, deren Graph die Punkte $P(-2{,}9|-6)$, $Q(-2|-2)$ und $R(7|2)$ enthält! Zeichnen Sie den Graphen von f nach Ermittlung der Definitionsmenge und der Nullstelle!

Hinweis: Verwenden Sie $\dfrac{f(7)-f(-2{,}9)}{f(7)-f(-2)}$ zur Berechnung von b!

Lösung: (a) $A = \dfrac{A}{\lg B}$, $b = \dfrac{D}{C}$, $c = \dfrac{A \lg C}{\lg B} + E$

(b) $f(x) = 3\lg(x+5)+1$. Verschiebung um 5 nach links und 1 nach oben. $x_0 = 10^{-\frac{1}{3}} - 5 \approx -4{,}54$

(c) $\lg \dfrac{b+7}{b-2{,}9} = 2 \cdot \lg \dfrac{b+7}{b-2} \;=>\; \dfrac{b+7}{b-2{,}9} = \left(\dfrac{b+7}{b-2}\right)^2 \;=>\; b = 3$

$f(x) = 4\lg(x+3) - 2$, $\mathbb{D}_f =]-3\,; +\infty[$, $x_0 = -3 + \sqrt{10} \approx 0{,}16$

8. Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 5 \cdot 3^x$ und $g(x) = 2 \cdot x^3$ ergeben bei geeigneter Achseneinteilung jeweils eine Gerade.

(a) Welche Darstellung muss jeweils gewählt werden? (Keine Zeichnung.)

(b) Berechnen Sie für die beiden Geraden die Steigung m und den Achsenabschnitt t.

Lösung: (a) Für f:einfach-logarithmisch, für g:doppelt-logarithmisch

(b) bei f: $m = \lg 3$, $t = \lg 5$, bei g: $m = 3$, $t = \lg 2$