

Kugel - Volumen und Oberfläche

1. Eine Firma erhält den Auftrag, Eisenkugeln zum Kugelstoßen herzustellen. Welchen Durchmesser müssen die Kugeln mit der Masse $m = 5 \text{ kg}$ haben?

(Dichte von Eisen: $\rho = 7,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$)

Lösung: 10,7 cm

2. Eine geschälte Orange von 4 cm Radius besteht aus 16 gleichen Schnitzen. Berechnen Sie Volumen und Oberfläche eines Schnitzes!

Lösung: $V = 16,8 \text{ cm}^3$; $O = 62,8 \text{ cm}^2$

3. Eine Kugel mit dem Radius R hat das gleiche Volumen wie eine Halbkugel mit dem Radius r . Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächen von Halbkugel und Kugel.

Lösung: $r = R \cdot \sqrt[3]{2}$; $A_{HK} = 3r^2\pi$; $\frac{A_{HK}}{A_K} = \frac{3}{\sqrt[3]{16}} \approx 1,19$

4. Die Sonne sendet pro Sekunde ungefähr $n_0 = 10^{45}$ Lichtteilchen (Photonen) aus, gleichmäßig auf alle Richtungen verteilt. Die Sonne ist mit dem bloßen Auge noch sichtbar, wenn ca. $n = 100$ Photonen pro Sekunde die Pupille ($A = 0,5 \text{ cm}^2$) treffen. In wie vielen Lichtjahren Entfernung ist die Sonne mit freiem Auge gerade noch sichtbar? (Lichtgeschwindigkeit = $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$)

Lösung: $\frac{n}{n_0} = \frac{A}{4\pi r^2} \implies r = 6,31 \cdot 10^{18} \text{ m} = 667 \text{ LJ}$

5. Um wieviel Prozent muss die Kantenlänge eines Würfels vergrößert werden, damit der vergrößerte Würfel das gleiche Volumen wie die Umkugel des ursprünglichen Würfels hat?

Lösung: 39,6%; Umkugelradius = halbe Raumdiagonale des Würfels

6. Eine hohle Kugel mit 10 cm Außendurchmesser und 4 mm Wanddicke schwimmt in Wasser (Dichte $\rho_W = 1,0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) und taucht genau bis zur Hälfte ein. Berechnen Sie die Dichte ρ_M des Materials, aus dem die Kugel besteht!

Lösung: $2,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (Auftriebsgesetz von Archimedes verwenden!)

7. K_1 ist ein „Achtelschnitt“ einer Kugel mit Radius r (ein Schnitt wie von einer Orange, die aus acht gleichen Schnitzen besteht). K_2 ist ein Viertel einer **Halbkugel** mit Radius r .

(a) Berechnen Sie die Rauminhalte V_1 und V_2 der beiden Körper.

(b) Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächen A_1 und A_2 der beiden Körper.

Lösung: (a) $V_1 = V_2 = \frac{\pi}{6} r^3$

(b) $A_1 = \frac{3}{2} r^2 \pi$, $A_2 = \frac{5}{4} r^2 \pi$, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{6}{5}$

8. Schneidet eine Ebene eine Kugel vom Radius R im Abstand d ($0 \leq d < R$) vom Kugelmittelpunkt, so wird eine sogenannte **Kugelhaube** der Höhe $h = R - d$ abgeschnitten. Für den Flächeninhalt F der Kugelhaube (ohne Boden) gilt dabei die Formel

$$F = 2\pi \cdot R \cdot h \quad (\text{kein Nachweis!})$$

(a) Folgern Sie mit Hilfe dieser Beziehung die Formel zur Berechnung der Kugeloberfläche!

(b) In welcher Höhe H über dem Horizont überblickt man den n -ten Teil ($n \geq 2$) der Erdoberfläche (Erdradius R)? Erstellen Sie eine Überlegungsskizze!

Lösung: (b) $H = \frac{2R}{n-2}$

9. (a) Zeigen Sie, dass für das Materialvolumen einer Hohlkugel mit dem Außendurchmesser $2r$ und der Wanddicke d gilt:

$$V = \frac{4}{3}\pi d(3r^2 - 3rd + d^2)$$

(b) Betrachten Sie nun diese Hohlkugel als Schicht der Dicke d und der „Grundfläche“ S und leiten Sie daraus einen näherungsweise Zusammenhang zwischen der Kugeloberfläche S , dem Radius r und der Wanddicke d her.

(c) Zeigen Sie nun mit Hilfe geeigneter Zahlenwerte:

Lässt man die Wanddicke d „beliebig dünn“ werden, so ergibt sich aus der Formel aus Aufgabe (b) durch geschicktes Vernachlässigen die exakte Formel für die Oberfläche einer Kugel vom Radius r .

Lösung: (b) $S \approx 4r^2\pi - 4r\pi d + \frac{4}{3}\pi d^2$ (c) $S = 4r^2\pi$

10. Um wieviel Prozent muss die Kantenlänge eines Würfels vergrößert werden, damit der vergrößerte Würfel das gleiche Volumen wie die Umkugel des ursprünglichen Würfels hat?

Lösung: 39,6%