Die Graphen der Winkelfunktionen

1. Zeichnen Sie für $x \in [-\pi; \pi]$ mit verschiedenen (nichtroten) Farben der Reihe nach die Graphen der Funktionen

   (a) $y = \sin x$, (b) $y = \sin 3x$, (c) $y = -2 \cdot \cos 3x$.

   (Längeneinheit: 2 cm auf beiden Achsen; $\pi \approx 3$)

   Lösung:

2. Stellen Sie in einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit: 2 cm auf beiden Achsen; $\pi \approx 3$) folgende Punktmenge M graphisch dar:

   $M = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 2\pi \text{ und } |\tan x| \leq y < |\cos x| + 1\}$

   Eine genaue und saubere Zeichnung ist gefordert!
   Beachten Sie: Gehört der begrenzende Rand zu M, so ist er farbig zu zeichnen. Sind die Endpunkte farbiger Linien keine Elemente von M, so ist dies in der Zeichnung entsprechend zu verdeutlichen!

   Lösung:

3. Stellen Sie in einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit: 2 cm auf beiden Achsen; $\pi \approx 3$; Querformat!) folgende Punktmenge M graphisch dar:

   $M = \{(x, y) \mid -2\pi < x \leq 2\pi \text{ und } \sin(-x) \leq y < |\cos x|\}$

   Eine genaue und saubere Zeichnung ist gefordert!
   Beachten Sie: Gehört der begrenzende Rand zu M, so ist er farbig zu zeichnen. Sind die Endpunkte farbiger Linien keine Elemente von M, so ist dies in der Zeichnung entsprechend zu verdeutlichen!

   Lösung:

4. Stellen Sie in einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit: 2 cm auf beiden Achsen; $\pi \approx 3$) folgende Punktmenge M graphisch dar:

   $M = \{(x|y) \mid -1 \leq x < 5 \text{ und } \cos x < y \leq 1 + \sin x\}$

   Eine genaue und saubere Zeichnung ist gefordert!
   Beachten Sie: Gehört der begrenzende Rand zu M, so ist er farbig zu zeichnen. Sind die Endpunkte farbiger Linien keine Elemente von M, so ist dies in der Zeichnung entsprechend zu verdeutlichen!

   Lösung:

5. Gegeben sind die Funktionsvorschriften

   $f_0 : x \longmapsto \tan x, \;\; f_1 : x \longmapsto \tan\left(\frac{1}{2}x\right), \;\; f_2 : x \longmapsto 2 + \tan\left(\frac{1}{2}x\right).$

(a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f_1 und untersuchen Sie diese Funktion rechnerisch auf Symmetrie.

(b) Beschreiben Sie knapp, wie der Graph von f_2 aus dem Graphen von f_0 über den Graphen von f_1 hervorgeht. Skizzieren Sie den Graphen von f_2 im Bereich $x \in [-\pi; \pi]$.

Lösung: (a): $\mathbb{D}_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$; f_1 ist ungerade.
(b): Dehnung des Graphen von f_0 um den Faktor 2 in x-Richtung liefert den Graphen von f_1. Eine anschließende Verschiebung um 2 in y-Richtung nach oben ergibt den Graphen von f_2.

6. Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \sin x + \cos x \qquad \text{mit } \mathbb{D}_f = \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f!

(b) Zeichnen Sie durch Überlagerung der Graphen von Sinus und Kosinus den Graphen G_f in einem kartesischen Koordinatensystem (Längeneinheit 1cm; $\pi \approx 3$) im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$! Verwenden Sie hierzu auch das Ergebnis von Teilaufgabe a)!

Lösung: (a): Nullstellen bei $x = \frac{\pi}{4} \cdot (3 + 4k), \qquad k \in \mathbb{Z}$

7. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sin x \cdot \tan x - \cos x$$

(a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge an.

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen.

(c) Untersuchen Sie f auf Symmetrie.

Lösung: $\mathbb{D}_{f,max} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\}; k \in \mathbb{Z}$;
Nullstellen bei $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$
Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse

8. Gegeben sind die folgenden drei Funktionsterme

$$f(x) = 4 \cdot \cos(3x)\,, \quad g(x) = 3 \cdot \sin(2x+1)\,, \quad h(x) = \sin(2x) \cdot \tan x$$

jeweils mit maximalem Definitionsbereich.

(a) Geben Sie die Definitionsbereiche $\mathbb{D}_f$, $\mathbb{D}_g$ und $\mathbb{D}_h$ an!

(b) Geben Sie die Nullstellenmengen dieser drei Funktionen an!

(c) Geben Sie das Symmetrieverhalten dieser drei Funktionen an!

Lösung: $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = \mathbb{R}\,; \quad \mathbb{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} \cdot (1+2k)\}\,,\ k \in \mathbb{Z}$

f und h sind gerade Funktionen, der Graph von g ist punktsymmetrisch zum Punkt $(-1|0)$ eines Koordinatensystems.