

Geometrische Folgen und Reihen

1. In der Formelsammlung findet man zum Thema „geometrische Reihen“:

$$a_\nu = a_1 \cdot q^{\nu-1} \Rightarrow s_n = \sum_{\nu=1}^n a_\nu = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Beweisen Sie damit folgende Formeln:

$$(a) \sum_{\nu=1}^n q^\nu = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \quad (b) \sum_{\nu=0}^{n-1} q^\nu = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (c) \sum_{\nu=0}^n q^\nu = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Lösung:

2. Eine Folge von Zahlen, in welcher der Unterschied je zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Zahlen konstant ist, heißt *arithmetische Folge*.

Betrachtet werde nun eine aufsteigende arithmetische Folge mit vier Gliedern. Addiert man zum ersten Folgenglied 1, zum zweiten 8, zum dritten 35 und zum vierten 122, so erhält man eine geometrische Folge. Bestimmen Sie die Glieder der beiden Folgen!

Lösung: arithmetische Folge: 4, 7, 10, 13 geometrische Folge: 5, 15, 45, 135

3. Die Summe aus den ersten fünf Gliedern einer geometrischen Folge mit $q = 0,8$ hat den Wert 420,2. Wie heißen der erste und der letzte Summand?

Lösung: $a_1 = 125$; $a_5 = 51,2$

4. In einer geometrischen Folge mit positiven Gliedern ist die Summe aus dem 2. und 4. Glied 102. Das 6. Glied ist 1536.

Berechnen Sie die Summe der ersten 7 Glieder.

Lösung: Anfangswert $a = 1,5$; Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder $q = 4$; $s_7 = 8191,5$

5. In einer geometrischen Folge mit positiven Gliedern ist das Produkt aus dem zweiten und vierten Glied gleich 1296, das fünfte Glied ist 16. Berechnen Sie die Summe der ersten 10 Glieder.

Lösung: Es ist $a_1 = aq^0 = 81$, $q = \frac{2}{3}$ und $s_{10} = \sum_{i=0}^9 aq^i = a \frac{q^{10}-1}{q-1} = \frac{58025}{243}$

6. Berechnen Sie den Wert der Summe $-3 + 6 - 12 + 24 - \dots - 3072$ mit Hilfe der Summenformel für geometrische Folgen.

Lösung: -2049

7. Bei einer geometrischen Folge mit positiven rationalen Gliedern beträgt die Summe des ersten und dritten Gliedes 20, die Summe des ersten und fünften Gliedes 17. Wie lautet das erste und das zehnte Glied dieser Folge?

Lösung: 16, $\frac{1}{32}$

8. Bei einer geometrischen Folge mit lauter positiven Gliedern beträgt das Produkt der beiden ersten Glieder 324, die Summe der Quadrate dieser Glieder 1377.

- (a) Berechnen Sie das erste Glied sowie den Quotienten dieser Folge!
(b) Berechnen Sie die Summe der ersten sieben Glieder!

Lösung: (a): 2 Lösungen: $a_1 = 9, q = 4$ bzw. $a_1 = 36, q = \frac{1}{4}$
(b): 49 149 bzw. $47\frac{1021}{1024}$

9. Die Summe der geraden Glieder einer geometrischen Folge von 5 rationalen Zahlen beträgt $\frac{5}{2}$, die der ungeraden Glieder $\frac{21}{4}$. Wie lauten die einzelnen Glieder?

Hinweis: Das mittlere Glied sei x ; verwenden Sie $\frac{1}{q^2} + q^2 = \left(\frac{1}{q} + q\right)^2 - 2!$

Lösung: 0,25; 0,5; 1; 2; 4 bzw. 4; 2; 1; 0,5; 0,25

10. Der Brahmane Sissa, Erfinder des Schachspiels, erbat sich auf Aufforderung des indischen Königs Shehram hin als Belohnung für seine Erfindung diejenige Summe Weizenkörner, die sich ergibt, wenn man auf das erste Feld des Schachbretts ein einziges Weizenkorn, auf das zweite Feld zwei, auf das dritte Feld 4, auf das vierte Feld acht Körner usw. legt.

- (a) Welche Summe von Weizenkörnern ergäbe sich?
(b) Welches Gewicht hätten diese insgesamt, wenn 20 Körner durchschnittlich 1 g wiegen?
(c) Wie hoch könnte eine quadratische Fläche der Seitenlänge 100 km damit bedeckt werden, wenn 15 Körner etwa 1 cm^3 Raum einnehmen?

Lösung: (a): $2^{64} - 1 \approx 1,84 \cdot 10^{19}$ (b): $9,22 \cdot 10^{11} \text{ t}$ (c): ca. 120 m

11. Zwischen 2 Tönen mit den Schwingungszahlen 1000 Hz und 2000 Hz (Oktave!) sollen elf Töne eingeschaltet werden, so dass die Folge der Schwingungszahlen dieser dreizehn Töne eine geometrische Folge bildet. Wie lautet der Quotient dieser Folge?

Lösung: $\sqrt[12]{2}$

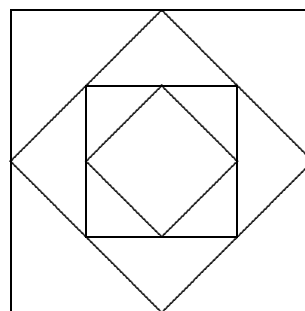
12. Schiebt man zwischen die Töne einer Oktave 11 Zwischentöne derart ein, dass deren Frequenzen eine geometrische Folge bilden, so entsteht eine Tonleiter mit „gleichmäßig-temperierter Stimmung“.

Beispiel: Der Ton c' hat eine Frequenz von 261 Hz, seine Oktave c'' eine doppelt so große. In C-Dur heißen die 11 Zwischentöne $cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais$ und h .

- (a) Berechnen Sie den Quotienten dieser geometrischen Folge auf zwei Dezimalen genau.
- (b) Der 9. Zwischenton ist der Kammerton a' , der zum Stimmen von Musikinstrumenten benutzt wird. Berechnen Sie seine Frequenz!

Lösung: 1,06; 441 Hz

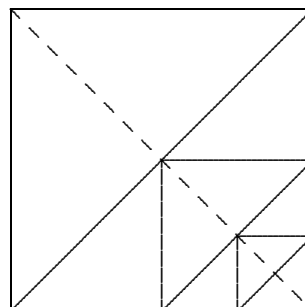
13. Einem Quadrat mit der Seitenlänge a wird ein zweites Quadrat derart einbeschrieben, dass dessen Ecken in den Seitenmitten des ersten liegen. Setzt man dieses Verfahren fort, so entsteht eine Folge von Quadraten. (vgl. Abb)



- (a) Stellen Sie den Flächeninhalt und den Umfang des n -ten Quadrats mit Hilfe der Seitenlänge a des ersten Quadrats dar.
- (b) Berechnen Sie die Summe der Umfänge der ersten 10 Quadrate für $a = 15$ cm.

Lösung: $A_n = a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $U_n = 4a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$; $S_{10} \approx 198.5$ cm

14. Ein Quadrat mit der Seitenlänge a wird durch eine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. In eines der beiden Dreiecke wird ein weiteres Quadrat einbeschrieben, das wiederum durch seine Diagonale in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird. Wiederholt man dieses Verfahren, so entsteht eine Folge von Quadraten. (vgl. Abb.)



- (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des n -ten Quadrats in Abhängigkeit der Seitenlänge a des ersten Quadrats.
- (b) Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der ersten 8 Quadrate für $a = 10$ cm.

Lösung: $A_n = a^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}; S_8 \approx 133 \text{ cm}^2$