Exponentialfunktionen - Bearbeitung mit Logarithmen

1. Betrachtet wird die Wachstumsfunktion

   $x \longmapsto N = N_0 \cdot a^x \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$

   Für $x = 3{,}0$ ist $N = 14929{,}92$.
   Für $x = 2{,}5$ ist $N = 12441{,}60$.

   (a) Berechnen Sie N_0 und den Wachstumsfaktor a!

   (b) Um welchen Betrag muss x zunehmen, damit der Bestand N um ein Drittel seines momentanen Wertes ansteigt?

   Lösung: (a): $N_0 = 5000;\ a = 1{,}44$
   (b): $\Delta x = 0{,}79$

2. (a) Zeichnen Sie für $-3 \leq x \leq 3$ den Graphen G_f der Funktion $f: \ x \longmapsto 2^x$ (Längeneinheit 1 cm)

   Nur eine genaue Zeichnung ermöglicht die Beantwortung der folgenden Teilaufgabe!

   (b) Die Gleichungen $\log_2 u = -1{,}7$ und $\log_2 3 = v$ lassen sich nach geeigneter Umformung mit Hilfe des Graphen G_f näherungsweise lösen.
   Veranschaulichen Sie die Lösungen u und v als Strecken im Koordinatensystem der Teilaufgabe (a) und geben Sie einen guten Näherungswert für u und einen für v an!

   Lösung: (b): $u \approx 0{,}3;\ v \approx 1{,}6$

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot 10^x - 1$ und maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.

   (a) Geben Sie $\mathbb{D}_f$ und die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ an!

   (b) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen!

   (c) Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion f^* von f!

   (d) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_{f^*} mit den Koordinatenachsen durch Überlegung! (Begründung angeben, keine Rechnung!)

   Lösung: (a): $\mathbb{D}_f = \mathbb{R};\ \mathbb{W}_f =]-1; \infty[$
   (b): $(0|1)$ bzw. $(-\lg 0{,}5|0)$
   (c): $y = \lg \dfrac{x+1}{2}$
   (d): $(0|-\lg 0{,}5)$ bzw. $(1|0)$

4. Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 5 \cdot 3^x$ und $g(x) = 2 \cdot x^3$ ergeben bei geeigneter Achseneinteilung jeweils eine Gerade.

   (a) Welche Darstellung muss jeweils gewählt werden? (Keine Zeichnung.)

   (b) Berechnen Sie für die beiden Geraden die Steigung m und den Achsenabschnitt t.

Lösung: (a) Für f:einfach-logarithmisch, für g:doppelt-logarithmisch

(b) bei f: $m = \lg 3$, $t = \lg 5$, bei g: $m = 3$, $t = \lg 2$

5. Gegeben ist die Funktion

$$f : x \longmapsto \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x}, \ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

   Zeichnen Sie den Graphen im Intervall $[-4; 4]$. (Längeneinheit auf beiden Achsen 1cm.)

   (a) Wenn das Argument um 2 wächst, dann ändert sich der Funktionswert y in charakteristischer Weise. Formulieren Sie diese Änderung in Worten und weisen Sie die Allgemeingültigkeit nach, indem Sie die Funktionswerte für x_1 und $x_2 = x_1 + 2$ vergleichen.

   (b) Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion und ihren Definitionsbereich. Zeichne Sie den Graphen der Umkehrfunktion noch in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Lösung: (a) Er ändert sich um den Faktor $\frac{1}{3}$

(b) $y = -\frac{2}{\lg 3} \lg x$, $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$