Einfache Gleichungen - Lösen durch Potenzieren oder Basisvergleich

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge (keine Dezimalbrüche): $\quad (1-3x)^4 \;=\; 625$

   Lösung: $\mathbb{L} = \{-\frac{4}{3};\ 2\}$

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x} = 6$$

   Lösung: $\mathbb{L} = \{6\}$

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x} = -6$$

   Lösung: $\mathbb{L} = \{\}$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge (keine Dezimalbrüche): $\quad 2{,}4x^{\frac{1}{5}} - 3 \;=\; 0{,}4x^{\frac{1}{5}}$

   Lösung: $\mathbb{L} = \{\frac{243}{32}\}$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{R}$: $\quad \sqrt[5]{x+2} = (8x)^{\frac{1}{10}}$

   Lösung: $\mathbb{L} = \{2\}$

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung:

$$4\sqrt{x} - \sqrt[6]{64x^3} = 6$$

   Lösung: $\mathbb{L} = \{9\}$

7. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$\sqrt{x^{12}} + 126 = (2 \cdot \sqrt[5]{x^5})^6$$

   Lösung: $\mathbb{L} = \{\sqrt[6]{2}\}$

8. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$3(x+4)^{\frac{1}{3}} = 4(x-33)^{\frac{1}{3}}$$

Lösung: $\mathbb{L} = \{60\}$

9. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$34 - 7\left(\frac{4x-1}{x-6}\right)^{\frac{1}{3}} = 13$$

Lösung: $\mathbb{L} = \{7\}$

10. Formen Sie die linke Gleichungsseite in eine Potenz um, die den gleichen Exponenten hat wie die rechte Seite und berechnen Sie dann die Lösungsmenge! Wenn nötig, sind Fallunterscheidungen vorzunehmen!

(a) $x^{24} = a^6$ (b) $x^{24} = a^8$ (c) $x^{12} = a^3$

Lösung: (a) $|x^4| = |a| \quad => \quad x^4 = |a| \quad => \quad \mathbb{L} = \{\pm|a|^{\frac{1}{4}}\}$

(b) $|x^3| = |a| \quad => \quad x^3 = \pm|a| \quad => \quad \mathbb{L} = \{\pm|a|^{\frac{1}{3}}\}$

(c) $(x^4)^3 = a^3 \quad => \quad x^4 = a \quad => \quad \mathbb{L} = \begin{cases} \{\pm a^{\frac{1}{4}}\} & \text{für} \quad a \geq 0 \\ \{\ \} & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$

11. Berechnen Sie die Lösungsmenge, gegebenenfalls mit Fallunterscheidung:

(a) $x^{2n} = -a\ ;\ n \in \mathbb{N}$ (b) $x^{-7} = a\ ;\ a < 0$ (c) $x^{-n} = a\ ;\ a > 0\ ;\ n \in \mathbb{N}$

Lösung: (a) $\mathbb{L} = \begin{cases} \{\ \} & \text{für} \quad a > 0\ ,\ \text{da } 2n \text{ gerade} \\ \left\{\pm \sqrt[2n]{|a|}\right\} & \text{für} \quad a \leq 0 \end{cases}$

(b) $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt[7]{\frac{1}{|a|}}\right\} = \left\{-\frac{1}{\sqrt[7]{-a}}\right\}$

(c) $\mathbb{L} = \begin{cases} \left\{\pm\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right\} & \text{für} \quad \text{n gerade} \\ \left\{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right\} & \text{für} \quad \text{n ungerade} \end{cases}$