Einbeschreibungen

1. Eine Kugel wird in einem möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wieviel Prozent des Zylindervolumens bleiben frei?

   Lösung: 33%

2. Einer Kugel vom Radius r ist ein Zylinder mit der Höhe $h = 1{,}5r$ einbeschrieben. Wie verhalten sich die Rauminhalte der beiden Körper?

   Lösung: $V_Z : V_K = 63 : 128$

3. Um wieviel Prozent muss die Kantenlänge eines Würfels vergrößert werden, damit der vergrößerte Würfel das gleiche Volumen wie die Umkugel des ursprünglichen Würfels hat?

   Lösung: 39,6%; Umkugelradius = halbe Raumdiagonale des Würfels

4. (a) Eine Glaskugel mit 12 cm Durchmesser wird in einen möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt. Wieviele Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes werden verschenkt?

   (b) Der Glasbläser hat die Kugel aus einem 3 cm dicken Tropfen Glas geblasen. Wie dick ist die Glaswand der Kugel?

   Lösung: $\frac{2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = 33\%$
   $\frac{4\pi}{3} r_0^3 \approx 4\pi R^2 d$ ergibt $d \approx 0.3\ mm$; eine exakte Rechnung liefert dasselbe Ergebnis.

5. Einem Kegel mit Radius r und Höhe h ist ein Zylinder einbeschrieben, der auf der Grundfläche des Kegels steht und dessen Grundkreisdurchmesser gleich seiner Höhe ist. Wie verhalten sich die Volumina von Kegel und Zylinder zueinander?

   Lösung: $V_{Ke} : V_{Zy} = (2r + h)^3 : 6rh^2$

6. Bei einem Kegel mit Grundkreisradius r und Höhe h ist die Mantellinienlänge m doppelt so groß wie h. Dem Kegel ist ein Zylinder einbeschrieben, der auf der Grundfläche des Kegels steht und dessen Mantelfläche ein Viertel der Mantelfläche des Kegels beträgt. Welchen Radius ϱ besitzt der Zylinder?

   Lösung: $\varrho = \frac{r}{2}$

7. Einem geraden Kreiskegel vom Grundkreisradius r, dessen Axialschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, lassen sich eine Kugel vom Radius R_e einbeschreiben und eine Kugel vom Radius R_u umbeschreiben.

(a) Zeichnen Sie einen gemeinsamen Axialschnitt der drei Körper für $r = 3\,\text{cm}$!

(b) Stellen Sie allgemein die Radien R_e und R_u der beiden Kugeln in Abhängigkeit von r dar!
(Teilergebnis: $R_e = \frac{r}{3}\sqrt{3}$)

(c) Wie verhalten sich die Volumina von umbeschriebener Kugel, Kegel und einbeschriebener Kugel?

Lösung: (b) $R_u = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$ (c) $V_u : V_{Ke} : V_e = 32 : 9 : 4$

8. Ein auf der Spitze stehender gleichseitiger Hohlkegel (d.h. ein Axialschnitt des Kegels ergibt ein gleichseitiges Dreieck) ist teilweise mit Wasser gefüllt. Wirft man in den Kegel eine Kugel mit dem Radius r, so wird diese gerade ganz von Wasser bedeckt und der Kegel ganz mit Wasser gefüllt. Berechnen Sie die Tiefe des Wassers vor und nach dem Hineinwerfen der Kugel!

Lösung: vorher: $r\sqrt[3]{15}$; nachher: $3r$

9. In einen auf der Spitze stehenden gleichseitigen Hohlkegel (d.h. ein Axialschnitt des Kegels ergibt ein gleichseitiges Dreieck) wird eine Kugel vom Radius r geworfen. Die Kugel taucht dabei gerade vollständig in den Kegel ein. Wie verhalten sich die Oberflächeninhalte von Kegel und Kugel?

Lösung: $O_{Ke} : O_{Ku} = 9 : 4$