Division durch Polynome höheren Grades

1. Berechnen Sie: $(x^5 + x^4 - x - 1) : (x^2 - 1)$

   Lösung: $x^3 + x^2 + x + 1$

2. Führen Sie eine Polynomdivision durch:

$$(48x^5 - 111x^3 + 83x^2 + 15x - 35) : (4x^2 + 3x - 7)$$

   Lösung: $12x^3 - 9x^2 + 5$

3. Berechnen Sie: $(81x^8 + 4) : (9x^4 + 6x^2 + 2)$

   Lösung: $9x^4 - 6x^2 + 2$

4. Führen Sie eine Polynomdivision durch:

$$(4x^6 - 4x^2 + 28x - 49) : (2x^3 + 2x - 7)$$

   Lösung: $2x^3 - 2x + 7$

5. Führen Sie die Polynomdivision durch:

$$(4x^7 + 14x^5 - \frac{4}{3}x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 6x + 1) \; : \; (3x^4 + 6x^2 - x)$$

   Lösung: $\frac{1}{3} \cdot (4x^3 + 6x - \frac{3}{x})$

6. (a) Dividieren Sie:

$$(x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 9x + 3) \; : \; (x^2 + 2x + 1)$$

   (b) Berechnen Sie unter Beachtung von Teilaufgabe (a) die Nullstellen des Polynoms $x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 9x + 3$!

   (c) Geben Sie ein Polynom 4. Grades an, das außer 2 keine weiteren Nullstellen hat! Der Gedankengang muss klar erkennbar sein!

   Lösung: (a): $x^2 + 3x + 3$
   (b): genau eine Nullstelle bei $x = -1$
   (c): z.B. $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x - 2)^4$

7. Gegeben sind die Polynome
$$A(x) = 6x^4 + 5x^3 - \tfrac{19}{2}x^2 + 5x - 1 \quad \text{und} \quad B(x) = 3x^2 - 2x + \tfrac{1}{2}\,.$$
Führen Sie die Polynomdivision durch.

Lösung: $6x^4 + 5x^3 - \frac{19}{2}x^2 + 5x - 1 \;=$
$(3x^2 - 2x + \frac{1}{2})(2x^2 + 3x - \frac{3}{2}) + (\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$

8. Gegeben sind die Polynome
$$A(x) = 6x^4 - 5x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 4x - 1 \quad \text{und} \quad B(x) = 3x^2 + 2x - \tfrac{1}{2}\,.$$
Führen Sie die Polynomdivision durch.

Lösung: $6x^4 - 5x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x - 1 \;=$
$(3x^2 + 2x - \frac{1}{2})(2x^2 - 3x + \frac{3}{2}) + (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$

9. Gegeben sind die Polynome
$$N(x) = 4x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 8 \quad \text{und} \quad D(x) = x^3 - x^2 + 2\,.$$
Es ist folgende Darstellung möglich: $N(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

   (a) Machen Sie Aussagen über die Grade der Polynome $Q(x)$ und $R(x)$

   (b) Bestimmen Sie die Polynome $Q(x)$ und $R(x)$.

Lösung: (a) Grad(Q) $= 1$; Grad(R) < 3

(b) $4x^4 - x^3 + x^2 + 3x + 8 \;=$
$(x^3 - x^2 + 2)(4x + 3) + (4x^2 - 5x + 2)$

10. Gegeben sind die Polynome
$$N(x) = 3x^4 + 4x^3 + x^2 + 5x + 4 \quad \text{und} \quad D(x) = x^3 - x + 2\,.$$
Es ist folgende Darstellung möglich: $N(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$

   (a) Machen Sie Aussagen über die Grade der Polynome $Q(x)$ und $R(x)$.

   (b) Bestimmen Sie die Polynome $Q(x)$ und $R(x)$.

Lösung: (a) Grad(Q) $= 1$; Grad(R) < 3

(b) $3x^4 + 4x^3 + x^2 + 5x + 4 \;=$
$(x^3 - x + 2)(3x + 4) + (4x^2 + 3x - 4)$