Das Prinzip von Cavalieri

1. Bei der Rotation des im linken Bild schraffierten (rechtwinkligen) Dreiecks um die vertikale Achse a entsteht ein Ring.

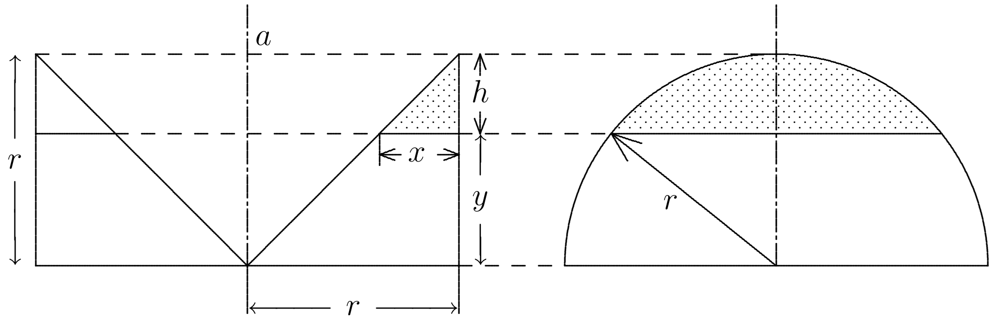
   (a) Begründen Sie $h = x$ und berechnen Sie die Grundfläche des Rings.

   (b) Zeigen Sie, dass für sein Volumen $V = \pi h^2(r - \frac{1}{3}h)$ gilt.

   (c) Die Kugel (Maße vgl. Abb.) und der Ring werden in derselben Höhe $y = r - h$ von einer horizontalen Ebene geschnitten. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur in Abhängigkeit von r und h.

   (d) Begründen Sie ohne weitere Rechnung mit dem Satz von Cavalieri, dass der schraffierte Teil der Kugel (genannt Kugelabschnitt) dasselbe Volumen hat, wie der Ring.

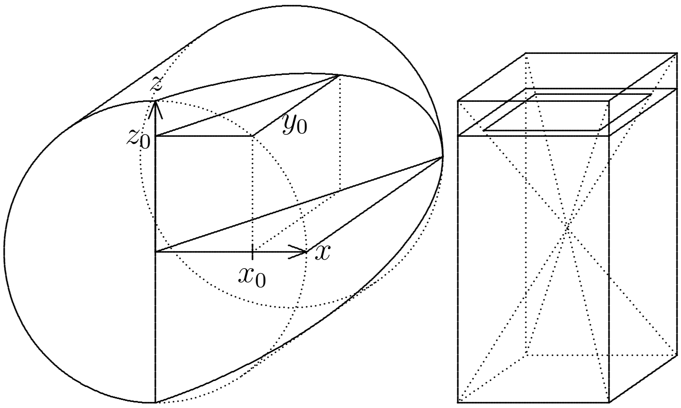
   Neben den Formeln für Zylinder und Kegel darf noch die Formel für das Volumen eines Kegelstumpfs verwendet werden: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + rR + r^2)$



Lösung:

2. Von einem Zylinder (in der linken Abbildung liegend) wird ein keilförmiges Stück durch einen ebenen Schnitt abgetrennt. Der Schnitt verläuft durch einen Durchmesser der vorderen Kreisfläche (im Bild lotrecht) und streift den Umfang der hinteren Kreisfläche. Durchmesser und Höhe des Zylinders stimmen überein und betragen 2 Längeneinheiten. Das Volumen des abgeschnittenen Keils soll berechnet werden.

   Dazu denken wir uns wie in der Zeichnung ein Koordinatensystem am Zylinder fixiert, die nicht eingezeichnete y-Achse ist die Symmetrieachse des Zylinders und zeigt nach hinten.



(a) Zeichne den Zylinder und die Schnittfläche von oben (Grundriß) und von vorne (Aufriß).

(b) Eine horizontale Schnittfläche im Keil in der Höhe z_0 hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks (vgl. Abbildung) mit Katheten der Länge x_0 und y_0. Zeichne das Dreieck in beide Risse ein.

(c) Zeige zunächst $y_0 = 2x_0$, $x_0^2 = 1 - z_0^2$ und begründe, dass die Dreiecksfläche den Inhalt $A = 1 - z_0^2$ hat.

(d) Der abgebildete Quader hat als Grundfläche ein Quadrat der Seitenlänge 1 und die Höhe 2. Aus ihm werden zwei Pyramiden herausgefräst, deren gemeinsame Spitze der Quadermittelpunkt ist und die als Grundfläche jeweils die Grund- bzw. die Deckfläche des Quaders haben. Zeige: Die Inhalte der Schnittflächen in der Höhe z_0 durch den Restkörper bzw. durch den Keil stimmen überein.

(e) Begründe: Das Volumen des Keils beträgt $V = \frac{4}{3}$.

Lösung: