# Additionstheoreme

1. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$\cos^4(\frac{x}{2}) - \sin^4(\frac{x}{2})$$

   *Lösung:* $\cos x$

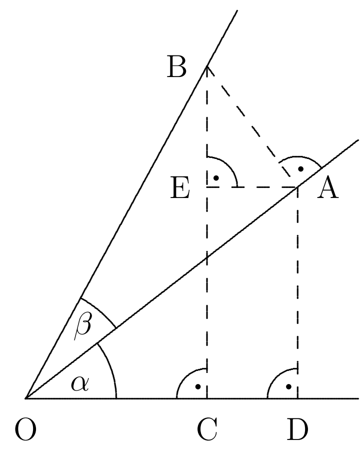
2. Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme den exakten Wert von $\cos 105^o$!

   *Lösung:* $\frac{1}{4}\sqrt{2}(1-\sqrt{3})$

3. Weisen Sie unter Zuhilfenahme nebenstehender Skizze die Gültigkeit des Additionstheorems

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

   nach!
   (Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\sphericalangle EBA = \alpha$!)




   *Lösung:*

4. Leiten Sie mit Hilfe der Additionstheoreme $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$ und $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ die Gültigkeit der Beziehung

$$\sin 4\alpha = 4 \cdot (\sin\alpha \cdot \cos^3\alpha - \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha)$$

   her!

   *Lösung:*

5. Leiten Sie mit Hilfe des Additionstheorems $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ die Gültigkeit der Beziehung

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1$$

   her! Lösen Sie nun unter Zuhilfenahme dieser Beziehung die Gleichung

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha$$

   im Bereich $[0° ; 360°]$!

*Lösung:* $\mathbb{L} = \{0°, 120°, 240°, 360°\}$

6. Bestätigen Sie die Additionstheoreme, indem Sie die Aufgaben sowohl „direkt“als auch mit Hilfe der Additionstheoreme lösen:

   (a) $\cos(210^o + 90^o)$

   (b) $\sin(240^o - 60^o)$

*Lösung:* (a) 0,5; (b) 0

7. (a) Zeigen Sie anhand eines geeigneten Beispiels, dass im allgemeinen gilt:

$$\sin 3x \neq 3 \sin x$$

   (b) Stellen Sie $\sin 3x$ in Abhängigkeit von $\sin x$ dar!

*Lösung:* $\sin 3x = 3 \sin x - 4(\sin x)^3$

8. (a) Zeigen Sie anhand eines geeigneten Beispiels, dass im allgemeinen gilt:

$$\cos 3x \neq 3 \cos x$$

   (b) Stellen Sie $\cos 3x$ in Abhängigkeit von $\cos x$ dar!

*Lösung:* $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3 \cos x$

9. Berechnen Sie aus

$$\cos 36^o = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

   die exakten Werte von

   (a) $\sin 36^o$

   (b) $\tan 36^o$

   (c) $\cos 72^o$

*Lösung:* $\sin 36^o = \frac{1}{4}(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$
$\tan 36^o = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$
$\cos 72^o = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$

10. Einem Kreis mit Radius 1 wird ein regelmäßiges 10-Eck einbeschrieben. Der Umfang des 10-Ecks beträgt $5(\sqrt{5} - 1)$. Berechnen Sie daraus die exakten Werte von

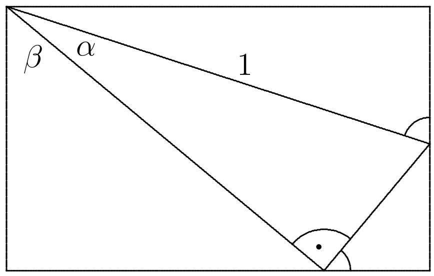
    (a) $\sin 18^o$

(b) $\sin 36^o$

(c) $\cos 36^o$

*Lösung:* $\sin 18^o = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$;
$\sin 36^o = \frac{1}{4}(\sqrt{10-2\sqrt{5}})$;
$\cos 36^o = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$;

11. (a) Das folgende Rechteck kann für beliebige Winkel $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ mit $\alpha + \beta < 90^0$ konstruiert werden. Beschreiben Sie knapp, ausgehend vom rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse der Länge 1 und dem Winkel $\alpha$, eine Reihe möglicher Konstruktionsschritte.




(b) Geben Sie die Größe der beiden durch Bögen markierten Winkel mit Hilfe von $\alpha$ und $\beta$ an.

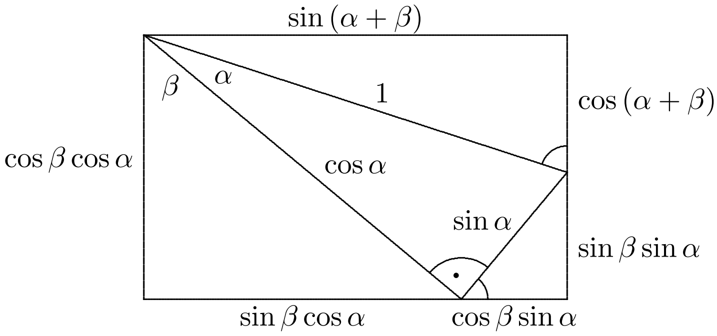
(c) Berechnen Sie die Längen der Rechteckseiten und ihrer Abschnitte mit Hilfe der Sinus- und Cosinuswerte der Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\alpha + \beta$.

(d) Leiten Sie daraus durch Vergleich die Additionstheoreme für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ her.

*Lösung:* (a) Man kann z.B. über der Kathete des ersten Dreiecks ein zweites rechtwinkliges Dreiecks mit dem Winkel $\beta$ konstruieren. Das Rechteck ergibt sich daraus mit Hilfe von Parallelen.

(b) unten $\beta$, rechts oben $\alpha + \beta$

(c)




12. Berechnen Sie exakt: $\sin 555°$

*Lösung:* $-\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

13. Die Seitenlänge eines regulären 10-Ecks mit Umkreisradius 1 beträgt $\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)$. Berechnen Sie anhand einer übersichtlichen Skizze die exakten Werte von $\cos 18^\circ$ und $\sin 36^\circ$!
Hinweis: Verwenden Sie die allgemeingültige Beziehung $\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$!

*Lösung:* $\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $\qquad \sin 36^\circ = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}$