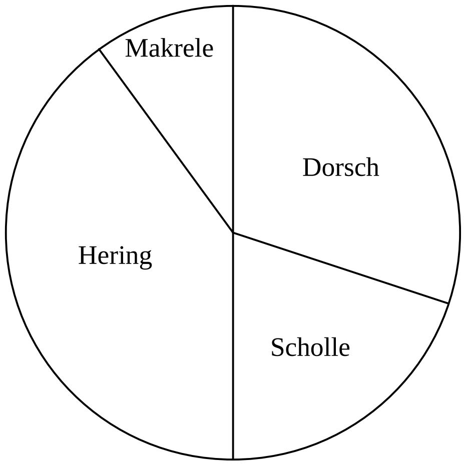
Wahrscheinlichkeit

1. Datenschutz

Eine Gruppe von zehn Menschen hat ein Durchschnittsalter von 40 Jahren. Aus Datenschutzgründen ist das Alter der einzelnen Personen nicht öffentlich bekannt. Eines Tages wird die Gruppe um eine Person erweitert, und dadurch sinkt das Durchschnittsalter der Gruppe auf 39 Jahre. Ist der Datenschutz bewahrt?

2. Fisch

Ein Fischer fängt in seinem Fanggebiet die Fischarten Dorsch, Scholle, Hering und Makrele.
Das nebenstehende Kreisdiagramm zeigt, mit welchem Anteil (nach Stückzahlen bestimmt) die einzelnen Arten durchschnittlich in seinem Fang vertreten sind.



Vom Fischgroßhändler erhält der Fischer durchschnittlich die folgenden Preise:

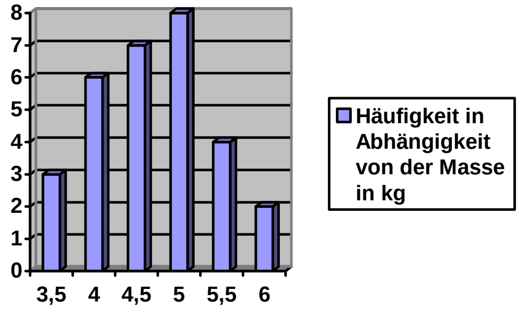
Fischart:	Dorsch	Scholle	Hering	Makrele
Preis pro Stück:	1,00 €	0,75 €	0,10 €	0,60 €

a) Ermittle aus dem Kreisdiagramm die relative Fang-Häufigkeit der einzelnen Fischarten in Prozent.

b) Welchen Erlös hat der Fischer bei 10000 gefangenen Fischen durchschnittlich zu erwarten?

3. Schulrucksäcke

Eine Wiegung der Schulrucksäcke von den Schülern der Klasse 5a ergab folgende Häufigkeitsverteilung:



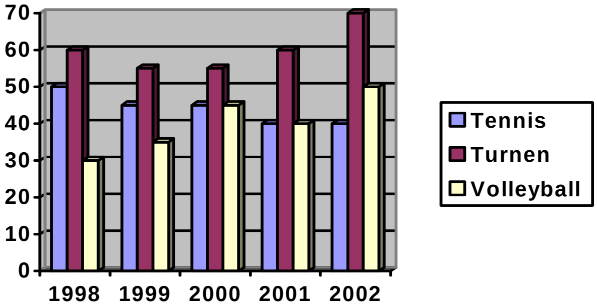
a) Wie schwer ist im Mittel der Rucksack eines Schülers der 5a?

b) Wie viel Prozent der Schüler der 5a kommt mit einem Rucksack von 4 kg in die Schule?

c) Wie viel Prozent der Schüler dieser Klasse tragen einen Rucksack, der 5 kg und mehr wiegt?

4. Sportverein

Ein Sportverein besitzt die Unterabteilungen Tennis, Turnen und Volleyball.
Folgendes Diagramm gibt die Mitgliederzahlen in den einzelnen Abteilungen der letzten fünf Jahre wieder:



a) Wie viele Mitglieder besaß der Sportverein 1998 insgesamt, wenn man davon ausgeht, dass jedes Mitglied nur in einer Abteilung gemeldet ist?

b) Wie viele Mitglieder hatte die Tennisabteilung im Mittel in den letzten fünf Jahren?

c) Um wie viel Prozent ist die Mitgliederzahl in der Volleyballabteilung bzw. in der Turnabteilung vom Jahr 2001 zum Jahr 2002 gestiegen?

d) Im Jahr 2003 wird in allen Abteilungen ein Mitgliederzuwachs von 10% erwartet. Zeichne unter diesen Voraussetzungen ein Diagramm der Mitgliederzahlen für das Jahr 2003.

5. Stein – Schere – Papier

Beim Spiel „Stein-Schere-Papier“ bildet jeder Spieler verdeckt eines der 3 Zeichen „Stein“, „Schere“ oder „Papier“. Die Zeichen werden gleichzeitig gezeigt. Dabei gilt: Stein gewinnt gegen Schere, Schere gewinnt gegen Papier und Papier gewinnt gegen Stein.

a) Berechne die jeweils die Siegchancen für Stein, Schere und Papier.

b) Wie ändern sich die Chancen, wenn außerdem noch „Brunnen“ zugelassen wird?

Die Regeln für „Brunnen“ sind:
Schere verliert gegen Brunnen
Stein verliert gegen Brunnen
Papier gewinnt gegen Brunnen

Hinweis: Der Fall, dass beide das Gleiche zeigen, kann vernachlässigt werden.

6. Glücksrad

Ein Glücksrad auf dem Jahrmarkt hat zehn Sektoren mit den Nummern 1 bis 10. Neun Sektoren sind gleich groß, der Sektor 10 ist doppelt so groß, wie die anderen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger auf dem großen Sektor stehen bleibt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger auf der 7 stehen bleibt?

c) Man gewinnt, wenn der Zeiger auf einer ungeraden Zahl stehen bleibt. Ist das Spiel fair? Begründe!

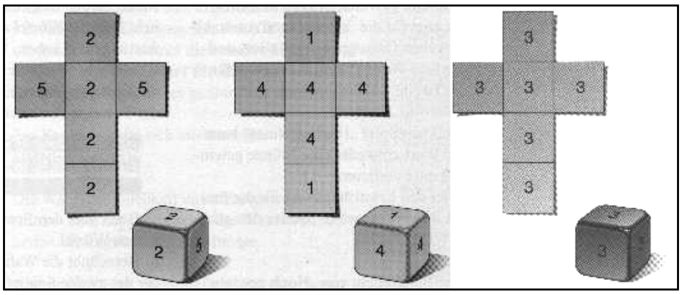
7. Hoch gewinnt

Mit diesen Würfeln soll das Spiel „Hoch gewinnt“ gespielt werden. Bei diesem Spiel gewinnt immer der Würfel, der die höhere Zahl zeigt.

a) Berechne die Gewinnwahrscheinlichkeiten der einzelnen Würfel gegeneinander und ergänze die Tabelle.

Würfel gegen Würfel	A	B	C
A	0,5		
B		0,5	
C			

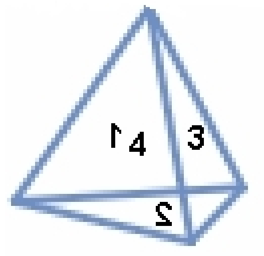
A B C



b) Wie groß wäre die Gewinnwahrscheinlichkeit für den zweiten Spieler, wenn dem ersten Spieler ein Würfel zugelost würde und der zweite Spieler sich daraufhin einen der verbleibenden Würfe aussuchen dürfte?

8. Zwei Würfel

Anna hat einen normalen Spielwürfel und Bernd hat in einem Geschäft für Zaubererausrüstung einen regelmäßigen Tetraeder mit den Zahlen von 1 - 4 auf den Seiten erstanden. Sie verabreden folgendes Spiel:



a) Jeder wirft seinen Würfel, und wer die höhere Zahl wirft, hat gewonnen. Bei Gleichstand wird noch einmal geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Bernd gewinnt?

b) Jeder wirft seinen Würfel, und diejenige Person mit der höheren Augenzahl bekommt von der anderen den Differenzbetrag in Spielchips. Wie viele Chips kann Anna erwarten?

9. Triebwerksausfall

Ein Flugzeug hat vier Triebwerke, an jeder der beiden Tragflächen zwei. Jedes Triebwerk fällt unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % während eines Fluges aus. Es kann mit drei Triebwerken noch fliegen, auch mit zwei, wenn diese nicht auf der gleichen Seite (an der gleichen Tragfläche) liegen. Ansonsten muss das Flugzeug notlanden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es auf einem Flug zur Notlandung kommt?

10. G^3

Mit einem ungewöhnlich geformten Würfel wollen Gundula, Gustavia und Gundolf auf ihrem Schulfest eine Losbude aufmachen. Der Gewinn soll für den Bau einer Aula benutzt werden. Sie haben sich das folgende Spiel überlegt:

Jeder Spieler zahlt einen Einsatz von 1 €.

Wird eine 6 gewürfelt, so erhält der Spieler 3 € ausbezahlt.

Wird eine 3 gewürfelt, so erhält der Spieler 1 € ausbezahlt.

Ansonsten wird der Einsatz einbehalten.

Sie überlegen nun, ob sie mit ihrem Spiel überhaupt einen Gewinn machen werden. Dazu würfeln sie einfach und erhalten die folgende Häufigkeitsverteilung:

	1	2	3	4	5	6
Gundula	23	9	34	45	6	60
Gustavia	55	13	77	93	12	100
Gundolf	43	11	65	84	10	87

Können die drei damit rechnen, einen Gewinn zu machen?

Wahrscheinlichkeit

1. Datenschutz
Die ursprünglich 10 Personen haben ein Gesamtalter von 400 Jahren.
Die danach 11 Personen haben ein Gesamtalter von 11*39 Jahren = 429 Jahre.
Also hat die neu hinzu gekommene Person ein Alter von 29 Jahren.
Der Datenschutz ist also nicht gewahrt, da man dieses Alter erschließen kann.

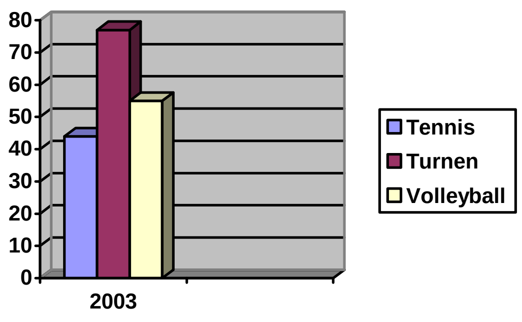
2. Fisch

Fischart:	Dorsch	Scholle	Hering	Makrele	Summe
Winkel des Kreissektors:	108°	72°	144°	36°	360°
Anteil in %:	30	20	40	10	100
zu erwartende Anzahl bei 10000 Stück	3000	2000	4000	1000	10000
zu erwartender Erlös	3000 €	1500 €	400 €	600 €	5500 €

Der Erwartungswert für den Erlös bei 10000 gefangenen Fischen beträgt 5500 € .

3.Schulrucksäcke
Berechnung des Mittelwertes der Schulranzenmasse M:
M = (3 · 3,5kg + 6 · 4kg + 7 · 4,5kg + 8 · 5kg + 4 · 5,5kg + 2 · 6kg)/30 = 4,67kg.
Es kommen 6 Schüler mit einem Rucksack von 4kg in die Schule, das sind 6/30 = 20%.
Es tragen 14 Schüler einen Rucksack mit 5kg und mehr, das entspricht 14/30 = 46,67%

4. Sportverein
Anzahl der Mitglieder im Jahr 1998: 50 + 60 + 30 = 140.
Die Tennisabteilung hatte im Mittel in den letzten fünf Jahren
(50 + 45 + 45 + 40 + 40)/5 = 44 Mitglieder.
Volleyball: Mitgliederzahlanstieg von 40 auf 50, das entspricht 10/40 = 25%.
Turnen: Mitgliederanstieg von 60 auf 70, das entspricht 10/60 = 16,7%.
Erwartete Mitgliederzahlen im Jahr 2003:
Tennis: 40 + 4 = 44
Turnen: 70 + 7 = 77
Volleyball: 50 + 5 = 55



5. Stein - Schere – Papier

a)

	Stein	Schere	Papier
Stein	Unentschieden	Stein gewinnt	Papier gewinnt
Schere	Stein gewinnt	unentschieden	Schere gewinnt
Papier	Papier gewinnt	Schere gewinnt	unentschieden

Alle Fälle werden als gleichwahrscheinlich angenommen. Stein, Schere und Papier gewinnen jeweils gegen einen und verlieren gegen einen anderen. Damit gewinnen sie in einer von 2 gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten (Unentschieden wird vernachlässigt). Damit beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit jeweils ½.

b)

	Stein	Schere	Papier	Brunnen
Stein	unentschieden	Stein gewinnt	Papier gewinnt	Brunnen gewinnt
Schere	Stein gewinnt	unentschieden	Schere gewinnt	Brunnen gewinnt
Papier	Papier gewinnt	Schere gewinnt	unentschieden	Papier gewinnt
Brunnen	Brunnen gewinnt	Brunnen gewinnt	Papier gewinnt	unentschieden

Stein und Schere gewinnen jeweils in einem von drei Fällen, Papier und Brunnen in zwei von drei Fällen. Damit ergeben sich für Stein und Schere jeweils Gewinnwahrscheinlichkeiten von $\frac{1}{3}$, für Papier und Brunnen jeweils von $\frac{2}{3}$.

6. Glücksrad

Da der große Sektor doppelt so groß ist, wie die anderen, kann er wie zwei Sektoren behandelt werden.

a) Damit bleibt der Zeiger mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{11}$ auf der 10 stehen.

b) p(„7“) = $\frac{1}{11}$

c) Es gibt fünf ungerade Zahlen, die alle gleichwahrscheinlich sind, und fünf Zahlen, die gerade sind, wobei die 10 doppelt zählt. Damit gilt p(„ungerade“) = $\frac{5}{11}$ und p(„gerade“) = $\frac{6}{11}$.

Das Spiel ist nicht fair, da die Chancen für Sieg und Niederlage nicht gleich sind.

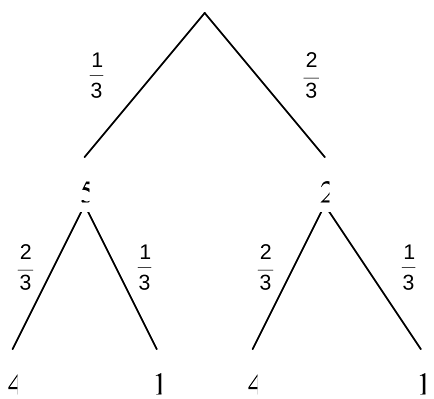
7. Hoch gewinnt

Die Gewinnwahrscheinlichkeit C gegen C beträgt 0, da es immer ein Unentschieden geben wird.

a) A gegen B:

1. Stufe:
Wurf Würfel A

2. Stufe:
Wurf Würfel B



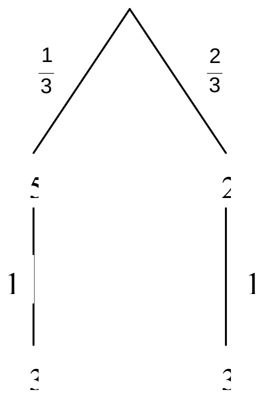
p(5;4) = $\frac{1}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ (Würfel A gewinnt)

p(5;1) = $\frac{1}{3} \bullet \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ (Würfel A gewinnt)

$p(2;4) = \frac{2}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ (Würfel B gewinnt)

$p(2;1) = \frac{2}{3} \bullet \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ (Würfel A gewinnt)

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Würfel A gegen Würfel B beträgt $\frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$, für Würfel B gegen Würfel A entsprechend $\frac{4}{9}$.



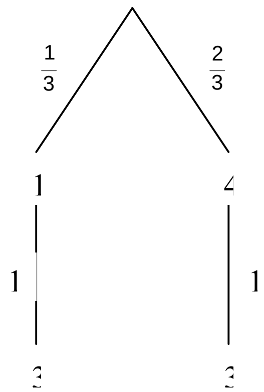
A gegen C:
1. Stufe:
Wurf Würfel A

2. Stufe:
Wurf Würfel C

$p(5;3) = \frac{1}{3} \bullet 1 = \frac{1}{3}$ (Würfel A gewinnt)

$p(2;3) = \frac{2}{3} \bullet 1 = \frac{2}{3}$ (Würfel C gewinnt)

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Würfel A gegen Würfel C beträgt $\frac{1}{3}$, für Würfel C gegen Würfel A entsprechend $\frac{2}{3}$.



B gegen C:
1. Stufe:
Wurf Würfel B

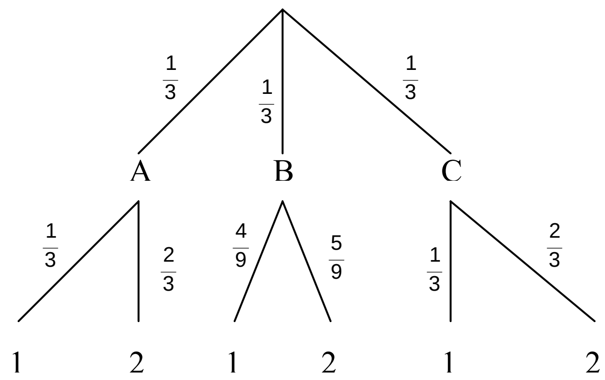
2. Stufe:
Wurf Würfel C

$p(1;3) = \frac{1}{3} \bullet 1 = \frac{1}{3}$ (Würfel C gewinnt)

$p(4;3) = \frac{2}{3} \bullet 1 = \frac{2}{3}$ (Würfel B gewinnt)

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Würfel B gegen Würfel C beträgt $\frac{2}{3}$, für Würfel C gegen Würfel A entsprechend $\frac{1}{3}$.

b) Wenn man davon ausgeht, dass Spieler 2 gewinnen will und sinnvoll handelt, so wird er gegen Würfel A Würfel C wählen, gegen Würfel B Würfel A und gegen Würfel C Würfel B. Weiter ist davon auszugehen, dass Spieler 1 alle Würfel mit gleicher Wahrscheinlichkeit zugelost bekommt.



1. Stufe:
Zugeloster Würfel für Spieler A

2. Stufe:
Spielernummer des Gewinners

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler 2 beträgt also $\frac{1}{3} \bullet \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \bullet \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{17}{27}$.

8. Zwei Würfel

a)

Es gibt bei einem Wurf mit beiden Würfeln 24 gleichwahrscheinlichen Möglichkeiten (Elementarereignisse) mit der Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{24}$. In der folgenden Tabelle sind die Gewinnfälle für Anna und für Bernd eingetragen:

	1	2	3	5	5	6
1	*	A	A	A	A	A
2	B	*	A	A	A	A
3	B	B	*	A	A	A
4	B	B	B	*	A	A

Die Wahrscheinlichkeit, dass Bernd gewinnt sei x.

<u>1. Lösung:</u>

Bernd gewinnt sofort in 6 von diesen 24 Fällen also mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass im ersten Wurf zum Gleichstand kommt ist p:= $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Dann sind beide Spieler anschließend wieder in der Ausgangssituation.

Es gilt also $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot x$

Lösen wir diese Gleichung erhalten wir: $x = \frac{3}{10}$.

<u>2. Lösung:</u>

Die Wahrscheinlichkeit, dass Bernd erst im k. Wurf gewinnt ist: $p^{k-1} \cdot \frac{1}{4}$.

Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass er irgendwann gewinnt:

$$x = \frac{1}{4}(\sum_{k=0}^{\infty} p^k) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-p} = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{10}$$

<u>3. (erwartete, naive) Lösung:</u>

20 gleichwahrscheinliche Fälle führen zur Entscheidung, davon sind 6 günstig für Bernd.

Also $x = \frac{3}{10}$

b)

<u>1. Lösung:</u>

Mit jeweils der gleichen Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{24}$ kommt es für Anna zu folgenden Auszahlungen:

	1	2	3	5	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	-1	0	1	2	3	4
3	-2	-1	0	1	2	3
4	-3	-2	-1	0	1	2

Die Summe dieser Auszahlungen beträgt: $34 - 10 = 24$. Also kann Anna 1 Chip erwarten.

2. Lösung: (Linearität des Erwartungswertes):

Mit ihrem Würfel erwartet Anna die Augenzahl $\frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

Mit seinem Würfel erwartet Bernd die Augenzahl $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

Die Differenz beträgt 1.

9. Triebwerksausfall

Es sei L/R das Ereignis, dass beide Triebwerke links/rechts ausfallen.

Es gilt $P(L) = P(R) = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$.

Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit von „L oder R“ .

$$P(L \cup R) = P(L) + P(R) - P(L \cap R) = \frac{1}{10000} + \frac{1}{10000} - \frac{1}{100000000} \approx \frac{1}{5000} \;.$$

10. G³

Insgesamt ist 827 mal gewürfelt worden. Damit erhalten die drei schon eine brauchbare Näherung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Würfels. In die Tabelle wird nun die absolute und die relative Häufigkeit für die gewürfelte Augenzahl eingetragen.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Gundula	23	9	34	45	6	60
Gustavia	55	13	77	93	12	100
Gundolf	43	11	65	84	10	87
Absolute Häufigkeit	121	33	176	222	28	247
Relative Häufigkeit	0,146	0,040	0,213	0,268	0,034	0,299

Damit erhält man (im Rahmen einer vernünftigen Genauigkeit) die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkleit für eine Augenzahl	0,15	0,04	0,21	0,27	0,03	0,30

Nun wird der Erwartungswert aus der Sich der drei Losbudenbetreiber gebildet:

Ereignis	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkleit für eine Augenzahl	0,15	0,04	0,21	0,27	0,03	0,30
Gewinn pro Spiel in Euro	1	1	0	1	1	-2

Der zu erwartende Gewinn pro Spiel beträgt also:
$(0{,}15+0{,}04+0{,}27+0{,}03)\cdot 1€+0{,}21\cdot 0€-0{,}30\cdot 2€=-0{,}11€$
Im Durchschnitt machen die drei Losbudenbetreiber pro Spiel einen Verlust von 0,11€. Sie können also nicht damit rechnen, einen Gewinn zu machen.

Kommentar:
- In der Lösung sollte die Anzahl der Würfe thematisiert werden. 827 Würfe sind erst mal schon eine brauchbare Anzahl, reichen aber nicht aus, um die Wahrscheinlichkeiten auf drei Stellen nach dem Komma anzugeben.
- Absolute und relative Häufigkeiten gehören zum Standardrepertoire. Deshalb muss nicht extra angegeben werden, wie diese berechnet werden.
- Wahrscheinlichkeiten können auch in Prozent angeben werden.
- Der Übersichtlichkeit halber sind drei Tabellen gebildet worden. Eine Schülerlösung, in der alles in einer Tabelle bearbeitet, ist auch richtig. Tabellen in einer Schülerlösung sind nicht zwingend notwendig.
- Bei der Berechnung des Erwartungswertes ist die Einheit Euro benutzt worden. Eine Schülerlösung ohne Einheiten in den Rechnungen ist dann vollständig richtig zu bewerten, wenn zumindest im Antwortsatz die Einheit sinnvoll auftritt.