Zentrale Klassenarbeit Mathematik 1998

Aufgabe zu Potenzen:

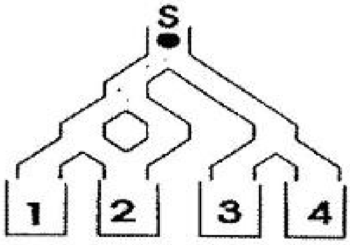
Die Variablen sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind.

a) Vereinfache so weit wie möglich $\left(\frac{x-2y}{y^2}+\frac{1}{x}\right) : \frac{x-y}{xy^2}$

b) Fasse zusammen und vereinfache $(\log_2 u^2 - \log_2 u + \log_2 \sqrt{u}) : \log_2 u^3$

c) Löse die Gleichung $2^{x+1} + 2^x = 24$

Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung:

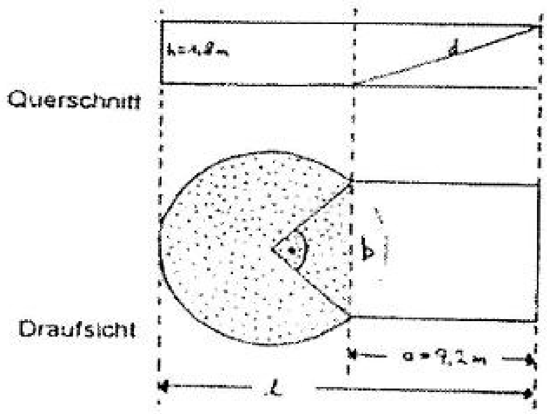


Bei einem Kugelspiel bewegt sich die Kugel vom Start S aus in einen der vier nummerierten Behälter (siehe Skizze). An jeder Verzweigung bewegt sich die Kugel mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 nach links bzw. nach rechts.

a) Das Spiel wird einmal durchgeführt und die erreichte Zahl notiert. Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieses Zufallsexperiments an. Bestimme die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
A: Die erreichte Zahl ist gerade
B: Die erreichte Zahl ist kleiner als 4.

b) Das Spiel wird nun zweimal hintereinander durchgeführt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C: Die Summe der erreichten Zahlen ist höchstens 3.

Aufgabe zur Körperberechnung:



Ein kreisrundes Schwimmbecken hat einen Durchmesser von 9,9m und ist über 1,8m tief.

a) Das Becken ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. Wie lange dauert die Entleerung, wenn pro Minute 400 Liter abfließen?

b) Im Zuge des Umbaus wird ein Teil des Beckens entfernt und dafür ein rechteckiger Beckenteil angebaut, dessen Boden schräg ansteigt. (Winkel- und Längenangaben siehe Skizze!)
Berechne für das neue Becken den Inhalt G der Grundfläche des 1,8m tiefen Teils (in der Skizze Punktiert).
Welche Breite b hat der rechteckige Teil des neuen Beckens?
Wie große ist die in der Skizze eingetragene Länge l ?

c) Das neue Becken aus Teil b) wird vollständig mit Wasser befüllt. Wie viel Liter sind dazu nötig, wenn G = 70m² und b = 7m sind?

Aufgabe zum Wachstum:

Ein Walnussbaum ist bei Beobachtungsbeginn 3,6m hoch. Ein Jahr später misst er schon 4,1m.

a) Man nimmt an, dass der Baum exponentiell wächst. Wie hoch wäre er 4 Jahre nach Beobachtungsbeginn? (Runde auf dm). Wann wäre er etwa 15m hoch?

b) Das Baumwachstum bis zur Endhöhe von 15m wird durch logistisches Wachstum besser beschrieben. Dabei gilt:

$$H(n+1) = H(n) + k \cdot H(n) \cdot (15 - H(n))$$

wobei H(n) die Baumhöhe (in Metern) nach n Jahren angibt.
Welche Baumhöhe ist dann 4 Jahre nach Beobachtungsbeginn zu erwarten?

Lösung zur Zentralen Klassenarbeit Baden-Würtemberg
Fach Mathematik, Haupttermin 1998 (math.-nat. Zug, Gruppe II)

Aufgabe 1

a)
$$\left(\frac{x-2y}{y^2}+\frac{1}{x}\right):\frac{x-y}{xy^2}=\frac{x\,(x-y)+y^2}{xy^2}\cdot\frac{xy^2}{x-y}=\frac{(x-y)^2}{xy^2}\cdot\frac{xy^2}{x-y}=x-y$$

b)
$$(\log_2 u^2-\log_2 u+\log_2\sqrt{u}):\log_2 u^3=(2\log_2 u-\log_2 u+\frac{1}{2}\log_2 u):(3\log_2 u)=$$
$$=(\frac{3}{2}\log_2 u):(3\log_2 u)=\frac{1}{2}$$

c) $2^{x+1}+2^x=2^x\cdot 2+2^x=2^x\cdot(2+1)=3\cdot 2^x=24\;\Rightarrow\;2^x=8\;\Rightarrow\;x=3$

Aufgabe 2

Betrachtet man die Abbildung, so erkennt man, daß zu jedem Behälter genau ein Weg führt, nur zu Behälter Nr. 2 sind es zwei. Berechnet man die Wahrscheinlichkeit mit der der Ball in den Behälter Nr. 2 fällt, so muß man die Wahrscheinlichkeit beider Wege addieren: $\mathrm{P}(2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$. Für die anderen Behälter erhält man: $\mathrm{P}(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(3)=\mathrm{P}(4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

a) Mit den vorangegangenen Ergebnissen lassen sich folgende Wahrscheinlichkeiten leicht berechnen: $\mathrm{P(A)}=\mathrm{P}(2)+\mathrm{P}(4)=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8},\ \mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}})=1-\mathrm{P}(4)=\frac{3}{4}$.

b) Es gibt drei Möglichkeiten, die dem Ereignis C entsprechen: 11, 12 oder 21. Die letzten beiden haben die gleiche Wahrscheinlichkeit und so ergibt sich:
$\mathrm{P}(\leq 3)=P(11)+2\cdot P(12)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}\frac{3}{8}=\frac{1}{64}+2\cdot\frac{3}{64}=\frac{7}{64}$.

Aufgabe 3

a) Volumen des Beckens: $\mathrm{V}_1=\frac{1}{4}\pi\,d^2\,h=139\,\mathrm{m}^3=1,39\cdot 10^5\,\mathrm{l}$
$\Rightarrow\;t=\frac{139\cdot 10^5\,\mathrm{l}}{400\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}}=348\,\mathrm{min}\approx 6\,\mathrm{h}$.

b) Ein Viertel der Kreisfläche wird durch ein rechteckiges gleichschenkeliges Dreieck ersetzt. Die Schenkellänge ist so lang wie der halbe Durchmesser. Somit ergibt sich für den Flächeninhalt: $\mathrm{G}=\frac{3}{4}\frac{1}{4}\pi\,d^2+\frac{1}{2}\frac{d}{2}\frac{d}{2}=\frac{1}{8}\,d^2(\frac{3}{2}\pi+1)=70\,\mathrm{m}^2$.
Mittels Satz des Pythagoras läßt sich die Breite des Beckens berechnen: $b=\frac{d}{\sqrt{2}}=7\,\mathrm{m}$.
$\Rightarrow\;l=\frac{d}{2}+\frac{b}{2}+a=4,95\,\mathrm{m}+3,5\,\mathrm{m}+7,2\,\mathrm{m}=15,7\,\mathrm{m}$

c) Das neue Becken besteht aus zwei Teilen; zum einem aus dem 1,8 m tiefen Teil mit der Grundfläche G und zum anderem aus dem rechteckigen Beckenteil mit der Form eines Prismas. Somit ist das Volumen: $V_2=G\cdot h+\frac{1}{2}\,a\,b\,h=171\,\mathrm{m}^3$.

Aufgabe 4

a) $\mathrm{B}(t)=\mathrm{B}(0)\,a^t\;\Rightarrow\;\mathrm{B}(1)=4,1=3,6\,a^1\;\Rightarrow\;a=1,14$
$\mathrm{B}(4)=\mathrm{B}(0)\,a^4=6,08\,\mathrm{m}\;\Rightarrow$ Der Baum ist nach 4 Jahren 6,08 m hoch.
$15=\mathrm{B}(0)\,a^t\;\Rightarrow\;t=\frac{\log 15-\log 3,6}{\log 1,14}=10,9\;\Rightarrow$ Nach ca. 11 Jahren ist der Baum 15 m hoch.

b) Mit den ersten beiden Messwerten (B(0)=H(0) und B(1)=H(1)) kann man k berechen:
$k=\frac{\mathrm{H}(1)-\mathrm{H}(0)}{\mathrm{H}(0)\,(15-\mathrm{H}(0))}=0,0122$
Hiermit lassen sich rekursiv die Baumhöhen der folgenden Jahre berechnen:
$\mathrm{H}(2)=4,64,\ \mathrm{H}(3)=5,23,\ \mathrm{H}(4)=5,85$.
4 Jahre nach Beobachtungsbeginn ist der Baum 5,85 m hoch.