Zentrale Klassenarbeit Mathematik 2000

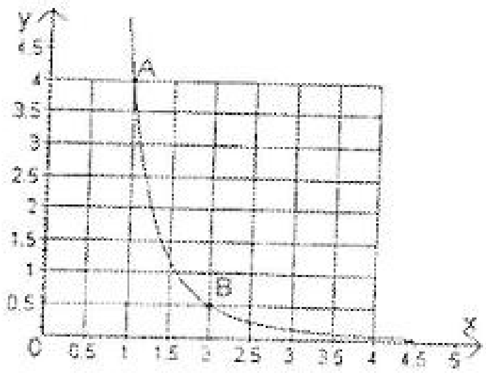
Aufgabe zu Potenzen:

Die Variablen sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind.

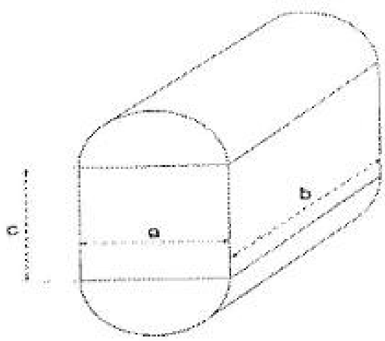
a) Vereinfache so weit wie möglich $\dfrac{a^x - a^{x+2}}{a^{x+1} - a^x}$

b) Fasse zusammen und vereinfache $2\log_3(2\sqrt{a}) - \log_3(7a) + \log_3\dfrac{7}{4}$

c) Nebenstehend ist für $x > 0$ das Schaubild der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^n$ gezeichnet. Bestimme a und n mittels der eingezeichneten Punkte A und B.
In welchem Punkt schneidet das Schaubild die Gerade $x = \frac{1}{2}$, in welchem Punkt die Gerade $y = \frac{1}{16}$



Aufgabe zur Körperberechnung:



Ein Heizöltank besteht aus einem quaderförmigen Mittelteil und zwei halben Kreiszylindern (siehe Skizze). Die Maße sind: a = 1m, b = 2m und c = 1m.

a) Wie viel Liter Heizöl passen maximal in den Tank?

b) In dem Tank befinden sich 2000 Liter Heizöl. Bis zu welcher Höhe ist er dann gefüllt?

c) Der Heizöltank soll durch einen neuen Tank entsprechender Form (siehe Skizze) ersetzt werden, der maximal 3000 Liter aufnehmen kann.
Dabei sollen die Maße b = 2m und c = 1m wie beim alten Tank sein.
Welche Breite a hat der neue Tank?

Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung:

In einer Schachtel befinden sich zwei weiße und vier gelbe Tischtennisbälle.
Frank entnimmt der Schachtel, ohne hinzusehen, zwei Bälle.

a) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse
A: Beide Bälle sind gelb
B: Ein Ball ist weiß und der andere ist gelb
C: Mindestens einer der beiden Bälle ist weiß?

b) Frank und Karl vereinbaren folgendes Spiel:
Sie nehmen abwechselnd einen Ball aus der Schachtel, ohne ihn zurückzulegen.
Wer zuerst einen weißen Ball zieht, hat gewonnen. Frank gewinnt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Frank das Spiel?
Wie oft müssen die beiden mindestens spielen, damit Karl mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% mindestens einmal gewinnt?

Aufgabe zum Wachstum:

Zwei verschiedene Flüssigkeiten A und B kühlen ab. A hat zu Beginn der Beobachtung eine Temperatur von 100°C, B hat zum gleichen Zeitpunkt eine Temperatur von 80°C.
Nach 10 Minuten hat sich A auf 74°C, B auf 70°C abgekühlt. Es wird angenommen, dass die Temperaturabnahme von A und von B exponentiell erfolgt.

a) Welche Temperatur hat die Flüssigkeit A 15 Minuten nach Beobachtungsbeginn?
Wie lange dauert es, bis die Temperatur von noch 30°C beträgt?

b) Wie lange dauert es, bis die Flüssigkeiten A und B die gleiche Temperatur erreicht haben?

A 1

a) $\frac{a^x(1-a^2)}{a^x(a-1)} = -(1+a)$ 2

b) $\log_3 4 + \log_3 a - \log_3 7 - \log_3 a + \log_3 7 - \log_3 4 = 0$

2

c) $f(x) = ax^n$

$f(1) = a = 4$

$f(2) = 4 \cdot 2^n = \frac{1}{2} \Rightarrow n = -3$

$f(x) = \frac{4}{x^3}$ 2

$f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{(\frac{1}{2})^3} = 32$ 1

$f(x) = \frac{4}{x^3} = \frac{1}{16} \Rightarrow x = 4$ 1 8

A 2 a) Zylinder : $V_Z = \frac{1}{2}\pi \ m^3 \approx 1{,}57 m^3$

Quader : $V_Q = 2 \ m^3$

Tank : $\frac{1}{2}\pi + 2 \ m^3 \approx 3{,}57 m^3$ 3

b) $2000\,l = 2m^3$

Zunächst läuft das Öl in den halben Zylinder.
Dann sind noch $2 - \frac{1}{4}\pi \ m^3$ übrig
Diese ergeben eine Höhe von

$(2 - \frac{1}{4}\pi)m^3 : 2m^2 = 1 - \frac{1}{8}\pi \ m \approx 0{,}6m$

Insgesamt ergibt sich eine Höhe von ~~[illegible]~~ 4

c) Neuer Zylinder $(\frac{1}{2}a)^2\pi \cdot 2$

neuer Quader $2a$

neuer Tank $2a + \frac{1}{2}\pi a^2 = 3$

$\frac{1}{2}\pi a^2 + 2a - 3 = 0 \quad | \cdot 2$

$\pi a^2 + 4a - 6 = 0$

$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24\pi}}{2\pi}$

$a_1 \approx 0{,}88 m$ 4

$a_2 < 0$ 11

Lösungen zu ZK Mathe BW Haupttermin 2000 sprachlich, Gr. A

Aufgabe 3

a)

$$p(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = 0,4$$

$$p(B) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}$$

Ereignis C ist das Gegenereignis zu A, also

$$p(C) = 1 - p(A) = 0,6$$

b) Baum mit Pfadregel.

1. Zug (Frank) weiß $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $*$

1. Zug (Frank) gelb $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2. Zug (Karl) weiß $\frac{2}{5}$

2. Zug (Karl) gelb $\frac{3}{5}$

3. Zug (Frank) weiß $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $*$

3. Zug (Frank) gelb $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

4. Zug (Karl) weiß $\frac{2}{3}$

4. Zug (Karl) gelb $\frac{1}{3}$

5. Zug (Frank) weiß $\frac{2}{2} = 1$ $*$

5. Zug (Frank) gelb $\frac{0}{2} = 0$

Die mit $*$ bezeichneten Pfade führen zum Gewinn für Frank. Die Wahrscheinlichkeit für seinen Gewinn ist also

$$p = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$$

Aufgabe 4

a) Eine exponentielle Abnahme hat immer die Form

$$f(x) = f(0) \cdot a^x$$

wobei $0 < a < 1$ ist. ($a > 1$ wäre ein exp. Wachstum.) Es ist $f(0) = 100$. Als x nehme ich Vielfache von 10 Minuten, so heißt z.B. $x = 2$, dass 20 Minuten vergangen sind. Weiß, dass $f(1) = 74$ ist. Daraus ergibt sich

$$a = \frac{f(1)}{f(0)} = 0,74$$

Also lautet die Funktion für A

$$f_A(x) = 100 \cdot 0,74^x$$

Nach 15 Minuten ($x = 1,5$):

$$f_A(1,5) = 100 \cdot 0,74^{1,5} = 63,66$$

Zeit bis zur Abkühlung auf 30 Grad:

$$f_A(x) = 100 \cdot 0,74^x \stackrel{!}{=} 30$$

ergibt

$$0,74^x = 0,3$$

und

$$x = \log_{0,74} 0,3 = \frac{\log 0,3}{\log 0,74} = 3,999$$

Also dauert es 39,99 Minuten.

b) Analog zu a) erhält man

$$f_B(x) = 80 \cdot 0,875^x$$

Setze $f_A(x) \stackrel{!}{=} f_B(x)$ und erhalte

$$100 \cdot 0,74^x = 80 \cdot 0,875^x$$

und daraus

$$\left(\frac{0,74}{0,875}\right)^x = 0,8$$

Folglich ist

$$x = \log_{0,8457} 0,8 = \frac{\log 0,8}{\log 0,8457} = 1,3316$$

Nach 13,32 Minuten sind beite Flüssigkeiten gleich warm.