Zentrale Klassenarbeit Mathematik 2003

Aufgabe zu Potenzen: (8 Punkte)

a) Vereinfache so weit wie möglich $\left[\frac{b^3}{a^{n-2}} : \frac{b^5}{c^{2n}}\right] : \frac{c^{2n}}{a^{n+3}}$

b) Löse die Gleichung $3^{2x} - 3^x = 6$

c) Wenn man die Zahlen $u = (10^{10})^{10}$ und $v = 10^{10(10)}$ ausschreibt, beginnen sie mit einer 1, danach kommen viele Nullen. Wie viele Stellen haben die Zahlen u bzw. v?
Ein Drucker gibt 150 Ziffern pro Sekunde aus. Wie lange braucht er ungefähr, um die ausgeschriebene Zahl u bzw. v zu drucken?

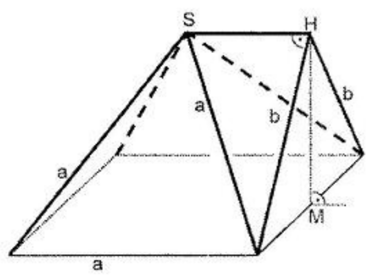
Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung: (7 Punkte)

Bei einem Tennismatch werden so viele Sätze bespielt, bis einer der beiden Spieler insgesamt zwei Sätze gewonnen hat. Ein Match besteht daher aus mindestens zwei und höchstens drei Sätzen.
Eva und Bettina spielen ein Match gegeneinander. Eva gewinnt Sätze jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,7. Zeichne ein Baumdiagramm.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Eva das Match?
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Sätze, die Eva in einem Match gegen Bettina gewinnt. Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

Aufgabe zur Körperberechnung: (9 Punkte)

Ein Zelt besteht aus einer regelmäßigen quadratischen Pyramide mit an der Seite angesetztem geschlossenem Vorzelt (siehe Skizze: Zeltstangen sind fett eingezeichnet).
Alle Kanten der regelmäßigen quadratischen Pyramide besitzen die Länge a = 2,20m.
Die Firststange SH verläuft parallel zum Boden. Der Punkt H befindet sich senkrecht über der Seitenmitte M.

a) Ein zylinderförmiger Packsack hat den Durchmesser 12 cm und die Länge 0,60 m. Wie viel Prozent des Inhalts des Packsacks bleiben leer, wenn das zusammengelegte Zelt einschließlich Zubehör 5,0 dm³ benötigt?
b) Berechne die Gesamtlänge der Zeltstangen.
c) Wie groß ist die Außenfläche des Zeltes einschließlich des Bodens?
Welches Volumen hat das aufgebaute Zelt einschließlich des Vorbaus?



Aufgabe zum Wachstum: (12 Punkte)

Für eine Langzeitstudie werden in ein abgegrenztes Versuchsgelände 50 Mäuse ausgesetzt.

a) Erfahrungsgemäß verdoppelt sich bei dieser Mäuseart unter optimalen Bedingungen die Zahl der Mäuse alle 9 Monate. Um wie viel Prozent ändert sich die Anzahl der Mäuse in einem Monat unter der Annahme eines exponentiellen Wachstums? Nach welcher Zeit wären es 1000 Tiere?

b) Eine Zählung ergab, dass dort nach einem Jahr 120 Mäuse leben. Ein Fachmann erklärt, dass auf einem Gelände dieser Größe wegen des begrenzten Platzes maximal 1000 Mäuse leben können. Er vermutet deshalb für die Zahl der Tiere ein logistisches Wachstum nach dem Gesetz:

$$B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (S - B(t)), \quad t \text{ in Jahren}$$

Wie viele Tiere würden nach dieser Vermutung am Ende des zweiten und des dritten Jahres auf dem Versuchsgelände zu erwarten sein?

c) In einem anderen Versuchsgelände gilt das Wachstumsgesetz:

$$B(t+1) - B(t) = 0{,}8 \cdot B(t) - 0{,}0001 \cdot B(t)^2$$

Auch in diesem Fall handelt es sich um ein logistisches Wachstum. Mit welchem Bestand wird Langfristig zu rechnen sein?

Lösung zur Zentralen Klassenarbeit Baden-Würtemberg
Fach Mathematik, Haupttermin 2003

Aufgabe 1)

a)
$$\left[\frac{b^3}{a^{n-2}} : \frac{b^5}{c^{2n}}\right] : \frac{c^{2n}}{a^{n+3}} = \frac{b^3}{a^{n-2}}\frac{c^{2n}}{b^5}\frac{a^{n+3}}{c^{2n}} = \frac{a^{n+3}}{a^{n-2}}\frac{b^3}{b^5}\frac{c^{2n}}{c^{2n}} = a^{n+3-(n-2)} \cdot b^{3-5} = \frac{a^5}{b^2}$$

b) $3^{2x} - 3^x = 6, \qquad$ Substitution: $z = 3^x$

$z^2 - z = 6 \;\rightarrow\; z^2 - z - 6 = 0$

$$z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}\,, \qquad z_1 = \frac{6}{2} = 3\,,\; z_2 = -\frac{4}{2} = -2$$

Resubstitution: $3^{x_1} = 3 \;\Rightarrow\; x_1 = 1\,,\; 3^{x_2} = -2 \;\Rightarrow\;$ keine Lösung für x_2!

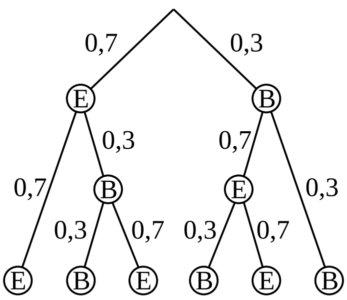
$\mathbb{L} = \{1\}$

c) $u = \left(10^{10}\right)^{10} = 10^{10\cdot 10} = 10^{100} \;\rightarrow\;$ 100 Nullen $\rightarrow$ 101 Stellen

$v = 10^{10^{10}} \;\rightarrow\; 10^{10} = 10$ Milliarden Nullen $\rightarrow\; 10^{10} + 1$ Stellen

Druckzeit: u: $t_u = \frac{101}{150}\,\mathrm{s} \approx 0{,}67\,\mathrm{s}\,,\; u$: $t_v = \frac{10^{10}}{150}\,\mathrm{s} = \frac{10^9}{15}\,\mathrm{s} = \frac{2 \cdot 10^8}{3}\,\mathrm{s} \approx 771\,\mathrm{d}$

Aufgabe 2)



Eva gewinnt bei folgenden Pfaden: EE, EBE, BEE. Nach der Pfadadditionsregel ist also die Wahrscheinlichkeit daß Eva gewinnnt: $P(E_G) = 0,7 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,7^2\,(1 + 2 \cdot 0,3) = 0,7^2 \cdot 1,6 = 0,784$

Nur auf den beiden Pfaden EE und BB werden zwei Sätze gespielt. Auf den übrigen Pfaden sind es drei. Die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Sätze gespielt werden, beträgt nach der Pfadadditionsregel: $\mathrm{P}(2) = 0,7^2 + 0,3^2 = 0,58$. Die Wahrscheinlichkeit, daß drei Sätze gespielt werden, beträgt demnach: $\mathrm{P}(3) = 1 - \mathrm{P}(2) = 0,42$.

Aufgabe 3)

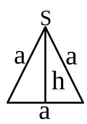
a)

Volumen des Packsacks: $V_{\mathrm{PS}} = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot h = \pi \cdot 36\,\mathrm{cm}^2 \cdot 6\,\mathrm{dm} = \frac{\pi}{100} \cdot 36 \cdot 6\,\mathrm{dm}^3 \approx 6,8\,\mathrm{dm}^3$

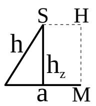
$\Rightarrow$ Relatives Leervolumen: $\frac{6{,}8-5}{6{,}8} \approx 0,26$. Es bleiben also 26 % des Packsacks leer.

b)

Um die Gesamtlänge der Zeltstangen berechnen zu können, müssen erst einige andere Größen des Zeltes berechnet werden, wobei der Satz des Pythagoras mehrfach zur Anwendung kommt.

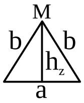
Länge der Höhe einer Zeltfläche: 

$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}\,a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$

Länge der Höhe des Zeltes: 

$h_{\mathrm{Z}}^2 = h^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}\,a^2 - \frac{1}{4}\,a^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow h_{\mathrm{Z}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a$

Länge von $\overline{\mathrm{SH}}$: An vorangegangener Grafik erkennt man leicht: $\overline{\mathrm{SH}} = \frac{a}{2}$

Länge von b: 

$b^2 = (\frac{a}{2})^2 + h_Z^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}\,a^2 = \frac{3}{4}\,a^2 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$

Gesamtlänge: $L_{\text{Ges}} = 4 \cdot a + 2 \cdot b + \overline{\text{SH}} = 4\,a + 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,a + \frac{a}{2} = a\,(\frac{9}{2} + \sqrt{3}) \approx 13,7\,\text{m}$

c)

Die Oberfläche des Zeltes besteht aus 3 Dreiecken des Pyramidendachs, dem Pyramidenboden, 2 Dreiecken des Vorbaudachs und dem Zelteingang:

$O_{\text{Ges}} = 3 \cdot \frac{1}{2}\,a\,h + a^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\,b\,\overline{\text{SH}} + \frac{1}{2}\,a\,h_Z = \frac{3}{2}\,a\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,a + a^2 + 2\,\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\,a\frac{\sqrt{2}}{2}\,a =$
$\frac{3\sqrt{3}}{4}\,a^2 + a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}\,a^2 = \frac{a^2}{4}\,(3\,\sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + \sqrt{2}) \approx 3,09 \cdot a^2 \approx 14,9\,\text{m}^2$

Das Zelt ist aus zwei Pyramiden aufgebaut. Zum einen aus der regelmäßigen Hauptpyramide und zum anderen aus der Vorbaupyramide. Letztere läßt sich leicht berechnen, wenn man den Eingang als Grundfläche und die Strecke $\overline{\text{SH}}$ als Höhe nimmt. Für das Gesamtvolumen ergibt sich folglich:

$V_{\text{Ges}} = \frac{1}{3}\,a^2\,h_Z + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,a\,h_Z\,\frac{a}{2} = \frac{1}{3}\,a^2\,h_Z\,(1 + \frac{1}{4}) = \frac{5}{12}\,a^2\,h_Z = \frac{5}{12}\,a^2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,a = \frac{5\,\sqrt{2}}{24}\,a^3 \approx 3,14\,\text{m}^3$

Aufgabe 4)

a)

Exponentielles Wachstum: $A(t) = A(0) \cdot a^t$

Verdopplungszeit $T_{\text{V}} = 9$ Monate, Anfangspopulation $A(0) = 50$

Hieraus erhält man zwei Gleichungen: $A(9) = 2 \cdot A(0)$ und $A(9) = A(0) \cdot a^9$

Durch Gleichsetzen ergibt sich für den Wachstumsfaktor a: $2 \cdot A(0) = A(0) \cdot a^9 \Rightarrow a = \sqrt[9]{2}$

Proz. Änderung in einem Monat: $\frac{A(t+1) - A(t)}{A(t)} = \frac{A(0)\,(\sqrt[9]{2})^{t+1} - A(0)\,(\sqrt[9]{2})^t}{A(0)\,(\sqrt[9]{2})^t} = \sqrt[9]{2} - 1 \approx 0,08$

Die Anzahl der Mäuse ändert sich in einem Monat um 8 %.

$1000 = 50\,(\sqrt[9]{2})^t \Rightarrow 20 = (\sqrt[9]{2})^t \Rightarrow \log(20) = t \;\Rightarrow t = \frac{\log(20)}{\log(\sqrt[9]{2})} \approx 39$ Monate $\approx 3,3$ y

Nach 39 Monaten wäre die Mäusepopulation auf 1000 angewachsen.

b)

Gegeben: $A(0) = B(0) = 50\,,\ B(1) = 120\,,\ S = 1000$

Durch Einsetzen in die angegebene Formel für logistisches Wachstum ergibt sich für k:

$B(1) = B(0) + k\,B(0)(S - B(0)) \Rightarrow k = \frac{B(1) - B(0)}{B(0)(S - B(0))} = \frac{120 - 50}{50\,(1000 - 50)} = \frac{7}{4750} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$

$B(2) = B(1) + k\,B(1)(1000 - B(1)) = 120 + \frac{7}{4750}\,120(1000 - 120) \approx 276$

$B(3) = B(2) + k\,B(2)(1000 - B(2)) \approx 570$

Am Ende des zweiten Jahres sind 276 Mäuse und am Ende des dritten Jahres sind 570 Mäuse zu erwarten.

c)

Addiert man auf beiden Seiten der angegebenen Seiten B(t) und vergleicht mit der unter Aufgabe b) angegebenen Gleichung, so ergeben sich für S und k folgende Werte:

$B(t+1) = B(t) + \underbrace{0,8}_{k \cdot S}\,B(t) - \underbrace{0,0001}_{k}\,(B(t))^2$

$\Rightarrow k \cdot S = 0,8 \wedge k = 0,0001 \Rightarrow S = \frac{0,8}{k} = 0,8 \cdot 10000 = 8000$

Langfristig ist mit einem Bestand von 8000 Mäusen zu rechnen.