Zentrale Klassenarbeit Mathematik 2004

Aufgabe zu Potenzen: (8 Punkte)

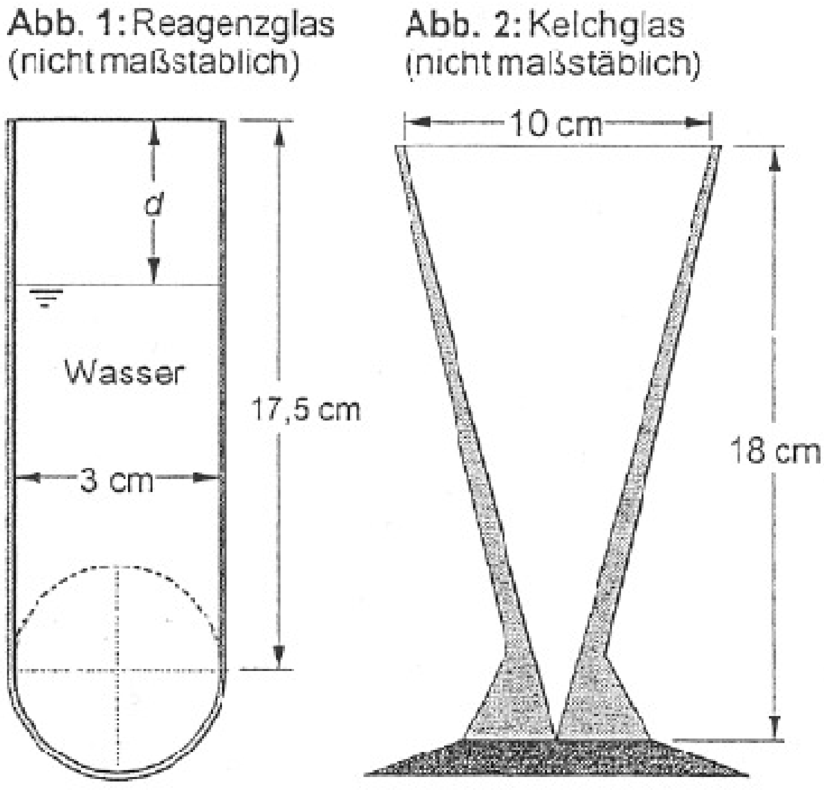
a) Vereinfache so weit wie möglich: $\dfrac{4^{n+1} + 12 \cdot 4^{n}}{4^{n+2} - 4^{n+1}}$

b) Löse die Gleichung: $3^{x+2} - 4 \cdot 3^{x} = 10$

c) Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2} x^{-2}$; $x \neq 0$
Skizziere das Schaubild von f. Um wie viel Prozent verändert sich der Funktionswert, wenn X (X > 0) verdoppelt wird?

Aufgabe zur Körperberechnung: (9 Punkte)

Ein Reagenzglas, das aus einer Halbkugel von 3 cm Innendurchmesser und einem 17,5 cm hohen Kreiszylinder zusammengesetzt ist, enthält 100 cm^3 Wasser (vgl. Abbildung 1).



a) Berechne den Abstand d des Wasserspiegels von der Oberkante des Reagenzglases.

b) Das Wasser aus dem Reagenzglas wird vollständig in ein Kelchglas, das innen die Form eines geraden Kreiskegels besitzt (vgl. Abbildung 2), eingefüllt.
Zu wie viel Prozent seines Gesamtvolumens ist das Kelchglas dann gefüllt?

Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung: (7 Punkte)

Das Büro einer Firma ist durch eine Türsicherung und einen Bewegungsmelder gegen Einbruch gesichert. Nach Werksangaben versagt die Türsicherung in 0,4 %, der Bewegungsmelder in 1,5 % aller Einbruchsversuche.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktionieren beide Sicherungen gleichzeitig?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einbrecher ungehindert in das Büro eindringen kann?

Dieses Risiko ist der Firma zu hoch.
Auf welchen Wert müssen die Wahrscheinlichkeiten für das Versagen des Bewegungsmelders verringert werden, damit die Wahrscheinlichkeit für ein ungehindertes Eindringen bei höchstens 1:100000 liegt?

Aufgabe zum Wachstum: (12 Punkte)

Durch ungünstige ökologische Bedingungen verringert sich der Bestand einer seltenen Pflanze im tropischen Regenwald. Deshalb wird sie besonders beobachtet.

a) Ihr Bestand nimmt jährlich um 10 % ab. Nach einer Schätzung gab es zu Beginn des Jahres 1995 noch 1200 Exemplare dieser Pflanzenart. Wie viele Exemplare werden voraussichtlich zu Beginn des Jahres 2010 noch vorhanden sein? Innerhalb welchen Zeitraums halbiert sich jeweils der Bestand?

b) Das Höhenwachstum einer solchen Pflanze wird verfolgt. Bei Beobachtungsbeginn ist sie 0,70 m hoch, einen Monat später 1,20 m. Man nimmt logistisches Wachstum der Form:

$$H(t+1) = H(t) + k \cdot H(t) \cdot (2{,}8 - H(t))$$

an (t in Monaten seit Beobachtungsbeginn; H (t) in Metern).
Nach wie vielen Monaten hat die Pflanze mehr als 80 % ihrer maximalen Höhe erreicht?
Wie hoch war die Pflanze nach diesem Modell einen Monat vor Beginn der Beobachtung?

Zentrale Klassenarbeit Mathematik 2004 - Lösung

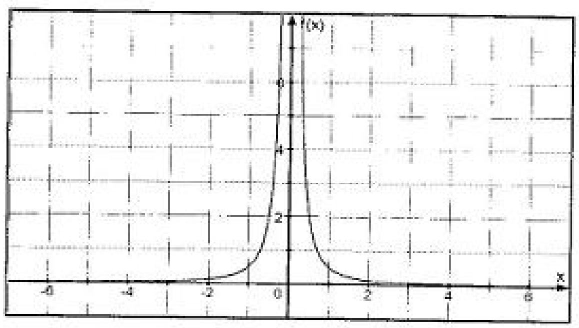
Aufgabe zu Potenzen:

a) $\frac{4^{n+1} + 12 \cdot 4^n}{4^{n+2} - 4^{n+1}} = \frac{4^n (4 + 12)}{4^{n+1} (4 - 1)} = \frac{16}{4 \cdot 3} = \frac{4}{3}$

b) $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 10 \rightarrow 3^x \cdot (3^2 - 4) = 10 \rightarrow 3^x = 2 \rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}63$

c) Skizze des Schaubildes mit Hilfe einer Wertetabelle:

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
y	0,125	0,5	2	-	2	0,5	0,125



Verdoppelung des X-Wertes: $f(2x) = \frac{1}{2}(2x)^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^{-2} = \frac{1}{4} \cdot f(x)$

Der Vorfaktor $\frac{1}{4}$ bewirkt, dass sich der Funktionswert um 75% reduziert.

Aufgabe zur Körperberechnung:

a) $V_{Halbkugel} = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 1{,}5^3 = 7{,}069\ cm^3$

Das restliche Volumen von $100\ cm^3 - 7{,}069\ cm^3 = 92{,}93\ cm^3$ steht nun für den Zylinder zur Verfügung.

$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow 92{,}93 = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot h \rightarrow h = 13{,}15cm$

$d = 17{,}5cm - 13{,}15cm = 4{,}35cm$

b) $V_{Kelchglas} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 18 = 471{,}2cm^3$

Das Volumen des Wassers aus dem Reagenzglas beträgt $100cm^3$.

Der prozentuale Anteil beträgt $\frac{100}{471{,}2} = 0{,}212 = 21{,}2\ \%$

Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Die Türsicherung funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,6 % = 0,996
Der Bewegungsmelder funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,5 % = 0,985

P (beide Sicherungen funktionieren) = P (TB) = $0{,}996 \cdot 0{,}985 = 0{,}98106$

P (beide Sicherungen funktionieren nicht) = $P(\overline{TB}) = 0{,}004 \cdot 0{,}015 = 0{,}00006 = \frac{6}{100000}$

Die Wahrscheinlichkeit für das Versagen des Bewegungsmelders soll reduziert werden.

Die neue Wahrscheinlichkeit sei $P = (\overline{B}) = p$

Es soll gelten: $P(\overline{TB}) = 0{,}004 \cdot p = \frac{1}{100000}$ → p = 0,0025 = 0,25 %

Nun sollte der Bewegungsmelder nur noch zu 0,25 % versagen.

Aufgabe zum Wachstum:

a) Da der Bestand jährlich um 10 % abnimmt, handelt es sich um exponentielles Wachstum.

$B(t) = B(0) \cdot a^t$, wobei t die Zeit in Jahren, beginnend ab 1995 ist.

Wachstumsgleichung: $B(t) = 1200 \cdot 0{,}9^t \rightarrow 0{,}5 = 0{,}9^t \rightarrow \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}9} = 6{,}58$ Jahre

b) Es gilt H (0) = 0,7 m und H (1) = 1,20 m

Einsetzen in die logistische Wachstumsgleichung:

$1{,}20 = 0{,}7 + k \cdot 0{,}7 \cdot (2{,}8 - 0{,}7) \rightarrow 0{,}5 = k \cdot 0{,}7 \cdot 2{,}1 \rightarrow k = 0{,}34$

Die Wachstumsgleichung lautet also: $H(t+1) = H(t) + 0{,}34 \cdot H(t) \cdot (2{,}8 - H(t))$

Zeit bis die Pflanze mehr als 80 % ihrer maximalen Höhe erreicht hat:
Die Pflanze kann maximal die Höhe 2,8 m erreichen (Schranke).
80 % von 2,8 m sind 2,24 m.
Mithilfe des Taschenrechners lassen sich folgende Werte ermitteln:
H (0) = 0,7; H (1) = 1,2; H (2) = 1,85; H (3) = 2,45
Also hat die Pflanze nach 3 Monaten mehr als 80 % ihrer maximalen Höhe erreicht.

Nun wird der Wert H (-1), also die Höhe der Pflanze einen Monat vor Beginn der Beobachtung gesucht.
Dieser wird nun mit x bezeichnet:

$H(0) = x + 0{,}34 \cdot x \cdot (2{,}8 - x) = 0{,}7 \leftrightarrow 0{,}7 = x + 0{,}952 \cdot x - 0{,}34 \cdot x^2$

$\leftrightarrow 0{,}7 = 1{,}952x - 0{,}34x^2 \leftrightarrow -0{,}34x^2 + 1{,}952x - 0{,}7 = 0$ Lösen mit Mitternachtsformel

$X_{1,2} = \frac{-1{,}952 \pm \sqrt{1{,}952^2 - 4 \cdot 0{,}34 \cdot 0{,}7}}{-0{,}68} = \frac{-1{,}952 \pm 1{,}69}{-0{,}68}$ also $x_1 = 0{,}385$ und $x_2 = 5{,}36$

Da die zweite Lösung nicht möglich ist (Schranke = 2,8 m) ist die gesuchte Lösung H (-1) = 0,385m.