Zentrale Klassenarbeit Mathematik
Haupttermin 2005 (Baden-Württemberg)

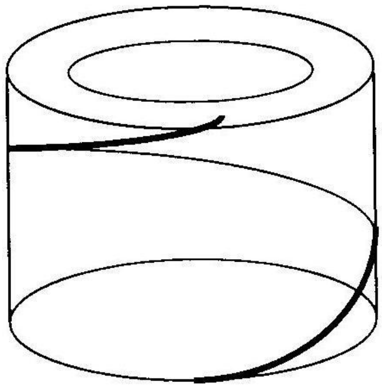
Aufgabe zu Potenzen: (7 Punkte)

a) Kürze soweit wie möglich: $\dfrac{4^n \cdot 25^{n+1}}{10^{2n+1}}$

b) Löse die Gleichung: $3^x \cdot 2^{x+1} = \dfrac{1}{3}$

c) Eine Goldfolie hat den Flächeninhalt $0{,}5\ m^2$ und ist 0,10 mm dick. Eine Maschine walzt diese Folie auf eine gleichmäßige Dicke von $3{,}2 \cdot 10^{-2}$ mm aus, wobei sich das Gesamtvolumen nicht ändert. Welchen Flächeninhalt hat die Folie jetzt?

Aufgabe zur Körperberechnung: (13 Punkte)



Berti entdeckt in dem Schatzkästchen seiner Oma eine zylinderförmige Blumenvase. Die Vase ist außen 15 cm hoch, Wand- und Bodenstärke betragen jeweils 1 cm, der Innendurchmesser 10 cm.

a) Berti bemalt den oberen Rand sowie daran anschließend einen überall 2 cm breiten Streifen auf der Außenseite der Vase mit Silberfarbe. Wie groß ist die bemalte Fläche?

b) Jetzt entdeckt Berti noch einen eisernen Briefbeschwerer in der Form eines geraden Kegels. Bei diesem Kegel sind Mantellinie und Grundkreisdurchmesser jeweils 9 cm lang. Berti stellt den Kegel mit der Spitze nach oben in die Vase und füllt anschließend einen halben Liter Wasser in die Vase. Untersuche, ob der Kegel vollständig mit Wasser bedeckt wird.

c) Über den äußeren Mantel der Vase verläuft ein Goldfaden von ihrem unteren Rand aus genau einmal um die Vase herum bis zu ihrem oberen Rand. Wie lange ist ein solcher Goldfaden?

Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung: (8 Punkte)

Petra will die Tür zum Klassenzimmer aufschließen. Dazu bekommt sie von ihrem Klassenlehrer einen Schlüsselbund mit fünf gleich aussehenden Schlüsseln.

a) Sie merkt sich nach jedem vergeblichen Versuch den Schlüssel, der nicht passte. Damit hat sie spätestens beim fünften Versuch die Türe aufgeschlossen. Zeichne ein Baumdiagramm für die möglichen Ereignisse. Mit welcher Wahrscheinlichkeit öffnet Petra die Tür im zweiten Versuch?

b) Angenommen Petra verhält sich nicht so klug und merkt sich die bereits probierten Schlüssel nicht. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Tür spätestens beim vierten Versuch öffnen lässt?

Aufgabe zum Wachstum: (8 Punkte)

Eine Population von Grönlandwalen lebt in einem bestimmten Gebiet des Nordpolarmeeres. Naturschützer ermitteln seit dem Jahr 1995 durch Zählungen jährlich den Bestand der Tiere. Dabei ergaben sich folgende Werte:

Beobachtungsjahr	1995	1996	1997	…	2003	2004
Anzahl der Wale am Jahresende	800	912	1040	…	2136	2388

a) Da die Wale keine natürlichen Feinde haben, kann man zunächst exponentielles Wachstum vermuten. Zeige, dass die ersten drei Zählungen diese Vermutung bestätigen.

b) Infolge des begrenzten Nahrungsangebots kann die untersuchte Population höchstens auf 10.000 Wale anwachsen. Auf lange Sicht ist es daher sinnvoll, logistisches Wachstum der Form:

$$B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$$

anzunehmen.

Ermittle aus den gegebenen Werten der Jahre 2003 und 2004 den voraussichtlichen Walbestand Am Jahresende 2006.

Zentrale Klassenarbeit Mathematik
Lösungsvorschlag zum Haupttermin 2005 (Baden-Württemberg)

Aufgabe zu Potenzen:

a) $\frac{4^n \cdot 25^{n+1}}{10^{2n+1}} = \frac{4^n \cdot 25^n \cdot 25^1}{10^{2n} \cdot 10^1} = \frac{100^n \cdot 25}{10^{2n} \cdot 10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

b) $3^x \cdot 2^{x+1} = \frac{1}{3} \rightarrow 3^x \cdot 2^x \cdot 2 = \frac{1}{3} \rightarrow 6^x = \frac{1}{6} \rightarrow x = -1$

c) Bei der Goldfolie handelt es sich um ein Prisma. Das Volumen des Primas vor der Walzung beträgt $V = G \cdot h = 0{,}5\ m^2 \cdot 0{,}10\ mm = 0{,}5\ m^2 \cdot \frac{0{,}10}{1000}\ m = 5 \cdot 10^{-5}\ m^3$

Die Höhe des Prismas (die Höhe der Goldfolie) nach der Walzung beträgt $3{,}2 \cdot 10^{-2}$ mm.
Daher gilt:

$V = G \cdot h \rightarrow G = \frac{V}{h} \rightarrow \frac{5 \cdot 10^{-5}\ m^3}{3{,}2 \cdot 10^{-2}\ mm} = \frac{5 \cdot 10^{-5}\ m^3}{\frac{3{,}2 \cdot 10^{-2}}{1000}\ m} = \frac{25}{16}\ m^2$

Aufgabe zur Körperberechnung:

a) Der obere Rand der Vase besteht aus einem Kreisring mit Innenradius 5 cm und Außenradius 6 cm.
$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 36 = 113{,}09$
$A_{Kreis\ klein} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 25 = 78{,}53$
$A_{Kreisring} = A_{Kreis} - A_{Kreis\ klein} = 113{,}09 - 78{,}53 = 34{,}56$
Der Streifen auf der Außenseite ist der Mantel eines Zylinders mit einem Radius von 6 cm und Einer Höhe von 2 cm.
$M = 2\pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 2 = 75{,}39$
Die bemalte Fläche ist somit $34{,}56 + 75{,}39 = 109{,}95\ cm^2$

b) In die Vase wird ein halber Liter Wasser, also $500\ cm^3$ eingefüllt. Zunächst benötigt man das Volumen des Kegels, der im Wasser steht:
Die Kegelhöhe beträgt $h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2} = 7{,}79$ cm
Es gilt: $V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 7{,}79 = 165{,}2\ cm^2$
Da der Kegel im Zylinder steht, handelt es sich nach dem Einfüllen des Wassers um einen „Wasserkörper“, der aus einem Zylinder mit heraus gebohrtem Kegel besteht:
$V_{Wasser} = V_{Zylinder} - V_{Kegel} \rightarrow 500\ cm^3 = \pi \cdot 5^2 \cdot h_{Wasser} - 165{,}2 \rightarrow h_{Wasser} = 8{,}47$ cm
Da der Kegel nur 7,79 cm hoch ist, ist der Kegel vollständig mit Wasser bedeckt.

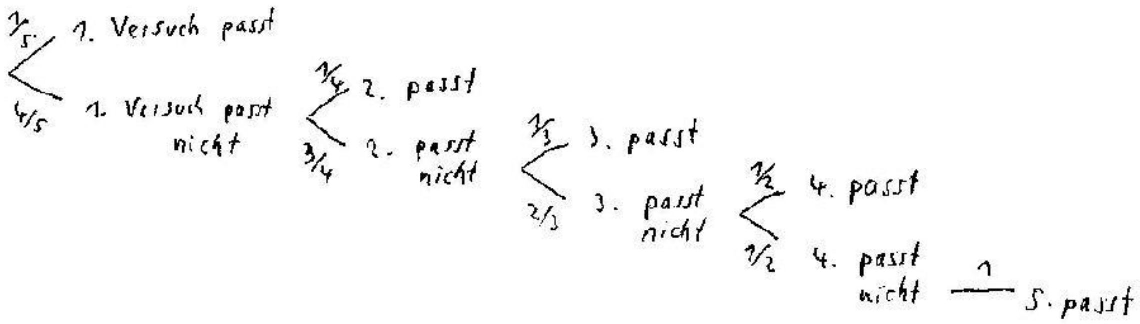
c) Die Länge des Goldfadens entspricht, wenn man den Zylindermantel aufschneidet und als Rechteck ausbreitet, der Länge der Diagonalen des Rechtecks. Das Rechteck besitzt die Breite $h_{Zylinder}$ = 15 cm und die Länge $U_{Grundkreis} = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 6 = 12\pi$

Die Rechteckdiagonale beträgt nach Pythagoras $d = \sqrt{15^2 + (12\pi)^2}$ = 40,6 cm

Der Goldfaden ist somit 40,6 cm lang.

Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung:

a) Baumdiagramm:



P (2. Versuch) = $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$; P (1. Versuch) = $\frac{1}{5}$; P (3. Versuch) = $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

P (4. Versuch) = $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$; P (5. Versuch) = $\frac{1}{5}$

Somit haben alle Fälle dieselbe Wahrscheinlichkeit, wenn sie sich die benutzten Schlüssel merkt.

b) Die Wahrscheinlichkeiten des Baumdiagramms gelten hier nicht mehr, da die Schlüssel nach der Benutzung nicht aussortiert werden.

P (spätestens 4. Versuch) = P (1. Versuch) + P (2. Versuch) + P (3. Versuch) + P (4. Versuch)

P (1. Versuch) = $\frac{1}{5}$; P (2. Versuch) = $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$; P (3. Versuch) = $(\frac{4}{5})^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{125}$

P (4. Versuch) = $(\frac{4}{5})^3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{64}{625}$; P (spätestens 4. Versuch) = $\frac{369}{625}$

Aufgabe zum Wachstum:

a) Der Zuwachsfaktor von 800 auf 912 beträgt 912 : 800 = 1,14
Der Zuwachsfaktor von 912 auf 1040 beträgt 1040 : 912 = 1,14
Da die Zunahme in den ersten drei Zählungen jeweils 14% des aktuellen Bestandes beträgt, kann hier exponentielles Wachstum unterstellt werden.

b) Es ist t die Zeit in Jahren seit Beginn im Jahr 2003.
Dann gilt: $B(0) = 2136$ und $B(1) = 2388$

Die Schranke S liegt bei 10.000

Daraus folgt: $B(1) = B(0) + k \cdot B(0) \cdot (10000 - B(0))$

Einsetzen der Werte: $2388 = 2136 + k \cdot 2136 \cdot (10000 - 2136) \rightarrow k = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$
Mit Hilfe des Taschenrechners ergeben sich folgende Lösungen:
$B(2) = 2661$; $B(3) = 2954$
Ende des Jahres 2006 leben dort ca. 2954 Wale