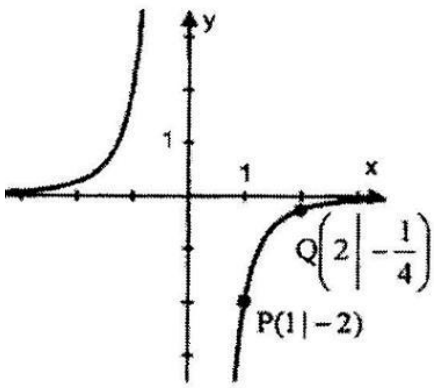
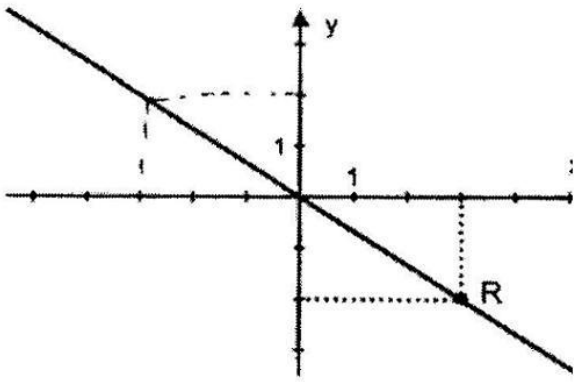
Zentrale Klassenarbeit Mathematik
Haupttermin 2006 (Baden-Württemberg)

Aufgabe zu Potenzen: (8 Punkte)

a) Kürze so weit wie möglich: $\dfrac{20 \cdot 5^{n+2} + 25 \cdot 5^{n+1}}{\left(\sqrt[n]{25}\right)^{2n}}$

b) Die abgebildeten Schaubilder lassen sich durch Funktionen mit Gleichungen der Form $f(x) = a \cdot x^k$, a Element aus R , k Element aus Z beschreiben.



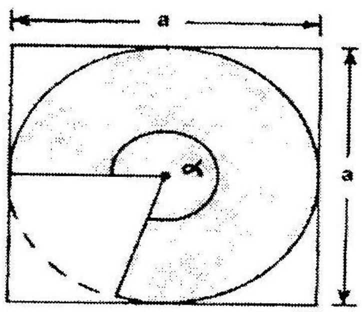


Bestimme die beiden Funktionsgleichungen.

c) In 150g eines Farbstoffes sind $6 \cdot 10^{23}$ Farbmoleküle enthalten. Von diesem Farbstoff wird 1g in den Bodensee gegeben, der ca. $5 \cdot 10^{10}$ m^3 Wasser enthält. Im Laufe der Zeit verteilt sich der Farbstoff gleichmäßig.
Wie viele Farbmoleküle befinden sich dann in einem Liter Wasser?

Aufgabe zur Körperberechnung: (12 Punkte)

Zur Herstellung eines Gefäßes wird aus einem quadratischen Blech der Seitenlänge a = 25cm ein größtmöglicher Kreisausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 288°$ ausgestanzt (siehe Skizze).



a) Wie viel Prozent des Blechs gehen beim Ausstanzen als Abfall verloren?

b) Der Kreisausschnitt wird nun so gebogen und verlötet, dass ein kegelförmiges Gefäß entsteht. Berechne das Volumen des Gefäßes. (Die Dicke des Bleches wird vernachlässigt).

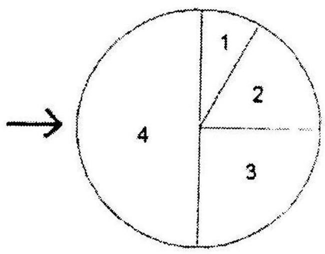
c) Ein kegelförmiges Gefäß mit dem Radius r = 10cm und der Höhe h = 7,5cm wird mit Flüssigkeit gefüllt. Wie hoch steht die Flüssigkeit, wenn die halbe Mantelfläche benetzt wird?

Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung: (8 Punkte)

Ein Glücksrad besteht aus vier Kreissektoren, die mit den Zahlen 1,2,3 und 4 versehen sind. Die Mittelpunktswinkel der verschiedenen Sektoren haben die Weiten 30°, 60°, 90° und 180°. (siehe Abbildung). Nach jeder Drehung gilt diejenige Zahl als gezogen, auf deren Kreissektoren der feststehende Pfeil zeigt.

a) Das Glücksrad wird dreimal gedreht.
   Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   A: Die erste gezogene Zahl ist ungerade.
   B: Die erste gezogene Zahl ist die 1, die zweite die 2.
   C: Es wird keine 3 gezogen.

b) Wie oft müsste man das Glücksrad drehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 97 % mindestens einmal die Zahl 4 gezogen wird?



Aufgabe zum Wachstum: (8 Punkte)

In einer Fischzucht werden Lachse aufgezogen.

a) Zu Beginn der Beobachtung betrug das Gesamtgewicht der vorhandenen Lachse 45.000 kg.
   Ohne Abfischen würde sich dieses Gewicht alle 6 Monate verdoppeln.
   Stelle ein mögliches Wachstumsgesetz auf.
   Nach welcher Zeit wären demnach 100.000 kg vorhanden?
   Wie viel Lachs muss täglich abgefischt werden, damit der Anfangsbestand von 45.000 kg Konstant bleibt?

b) Das Gewicht eines einzelnen Lachses entwickelt sich nach folgendem Gesetz:

$$G(t+1) = G(t) + 0{,}016 \cdot G(t) \cdot (S - G(t))$$

   t in Jahren seit Beobachtungsbeginn, G (t) in kg.

   Zu Beginn der Beobachtung wiegt ein Lachs 7,2 kg, ein Jahr später 10,0 kg.
   Welches Gewicht kann dieser Lachs erreichen?
   Nach wie vielen Jahren wird dieser Lachs mehr als 17 kg wiegen?

Zentrale Klassenarbeit Mathematik
Lösungsvorschlag zum Haupttermin 2006 (Baden-Württemberg)

Aufgabe zu Potenzen:

a) $\dfrac{20 \cdot 5^{n+2} + 25 \cdot 5^{n+1}}{(\sqrt[n]{25})^{2n}} = \dfrac{20 \cdot 5^2 \cdot 5^n + 25 \cdot 5 \cdot 5^n}{25^2} = \dfrac{25 \cdot 5^n (20+5)}{5^4} = \dfrac{5^n \cdot 25 \cdot 25}{5^4} = 5^n$

b) Auf dem ersten Schaubild sin die Punkte P (1/-2) und Q (2/-0,25) sichtbar.
Einsetzen in die Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^k$
P eingesetzt: $-2 = a \cdot 1^k \rightarrow a = -2$
Q eingesetzt: $-0{,}25 = a \cdot 2^k \rightarrow \frac{1}{8} = 2^k \rightarrow k = -3$, daraus folgt: $f(x) = -2 \cdot x^{-3}$

Das zweite Schaubild stellt eine Gerade dar, daher ergibt sich k = 1.
Punktprobe mit dem gegebenen Punkt R (3/-2): $-2 = a \cdot 3^1 \rightarrow a = -\frac{2}{3}$, also $f(x) = -\frac{2}{3}x$

c) In 1g Farbstoff sind $\dfrac{6 \cdot 10^{23}}{150} = 4 \cdot 10^{21}$ Farbmoleküle enthalten.
Im Bodensee sind $5 \cdot 10^{10}\ m^3 = 5 \cdot 10^{10} \cdot 10^3\ dm^3 = 5 \cdot 10^{13}$ Liter Wasser enthalten.

In einem Liter Wasser sind dann $\dfrac{4 \cdot 10^{21}}{5 \cdot 10^{13}} = 80.000.000$ Farbmoleküle enthalten.

Aufgabe zur Körperberechnung:

a) Das Quadrat hat die Fläche von $A_Q = 25 \cdot 25 = 625\ cm^2$

Der Kreisausschnitt besitzt die Fläche $A_K = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} = \pi \cdot 12{,}5^2 \cdot \frac{288°}{360°} = 392{,}7\ cm^2$

Abfall: $625 - 392{,}7 = 232{,}3\ cm^2$. Somit gehen $232{,}3\ cm^2$ verloren.

In Prozent sind das: $\frac{232{,}3}{625} = 0{,}37 = 37\ \%$

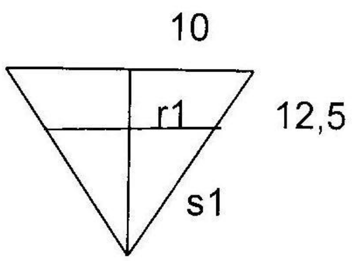
b) Vom Kegel ist Folgendes bekannt: Mantellinie s = 12,5 cm und Mantelfläche = $392{,}7\ cm^2$

Es gilt $M_{Kegel} = \pi \cdot r_{Kegel} \cdot s \rightarrow 392{,}7 = \pi \cdot r_{Kegel} \cdot 12{,}5 \rightarrow r_{Kegel} = 10\ cm$

Die Höhe des Kegels ergibt sich mit Pythagoras: $h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{12{,}5^2 - 10^2} = 7{,}5\ cm$

Volumen des Kegels: $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 7{,}5 = 785{,}4\ cm^3$

c) Die Flüssigkeit stellt einen neuen Kegel innerhalb des großen Kegels dar. Wir nennen daher die Mantellinie des kleinen Kegels s1 und den Radius r1. Der große Kegel aus Aufgabe b) hat den Radius r = 10 cm und die Mantellinie s = 12,5 cm.



Von dem kleinen Kegel ist bekannt: $M = \frac{392{,}7}{2} = 196{,}35\ cm^2$

Daher gilt: $196{,}35 = \pi \cdot r_1 \cdot s_1$

Da die Gleichung nun zwei Unbekannte enthält, benötigt kann eine weitere Formel, nämlich den 2. Strahlensatz:

$\frac{10}{r1} = \frac{12{,}5}{s1} \Leftrightarrow 10\ s_1 = 12{,}5\ r_1 \Leftrightarrow s_1 = 1{,}25 \cdot r_1$

Einsetzen der 2. Gleichung in die 1. : $196{,}35 = \pi \cdot r_1 \cdot 1{,}25 \cdot r_1 \Leftrightarrow r_1^2 = 50 \Leftrightarrow r_1 = 7{,}07\ cm$

Daraus ergibt sich: $s_1 = 1{,}25 \cdot 7{,}07 = 8{,}84\ cm$

Die Höhe des kleinen Kegels beträgt also: $\sqrt{8{,}84^2 - 7{,}07^2} = 5{,}31\ cm$. Demnach steht die Flüssigkeit 5,31cm hoch.

Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung:

a) Wahrscheinlichkeiten aufgrund der Gradzahlen:

$P(1) = \frac{30}{360} = \frac{1}{12}$; $P(2) = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$; $P(3) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}$; $P(4) = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$

$P(A) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

$P(B) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$

$P(C) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$

b) P (einmal 4) soll 0,97 sein. Das Rad wird dabei n-mal gedreht. Das Gegenereignis zu „mindestens einmal die 4“ ist „niemals 4“. Die Wahrscheinlichkeit dafür liegt, aufgrund der errechneten Wahrscheinlichkeiten bei einer Drehung bei 0,5.

Bei n Drehungen ist die Wahrscheinlichkeit für „niemals 4“ = $(\frac{1}{2})^n$

Somit gilt: 1 – P (niemals 4) = 0,97 → $1 - (\frac{1}{2})^n = 0{,}97$

$(\frac{1}{2})^n = 0{,}03 \rightarrow \frac{\log 0{,}03}{\log 0{,}5} = 5{,}06$

Das Rad muss etwa 5-mal gedreht werden.

Aufgabe zum Wachstum:

a) Das Lachsgewicht wächst mit exponentiellem Wachstum, da alle 6 Monate eine Verdopplung stattfindet.
$B(t) = 45000 \cdot a^t$ mit t = Zeit in Monaten und B (t) = Gesamtgewicht in kg

Es gilt $B(6) = 90000 \rightarrow 90000 = 45000 \cdot a^6 \rightarrow 2 = a^6 \rightarrow a = \sqrt[6]{2} = 1{,}1225$

Wachstumsgesetz: $B(t) = 45000 \cdot 1{,}1225^t$
Zeit bis 100.000 kg vorhanden sind: $100000 = 45000 \cdot 1{,}1225^t \rightarrow t = 6{,}91$ Monate

Zuwachs des Lachsgewichtes innerhalb eines Tages:
$B\left(\frac{1}{30}\right) = 45000 \cdot 1{,}1225^{1/30} = 45173{,}7$ kg

Damit muss täglich 173,7 kg abgefischt werden, damit der Bestand von 45.000 kg Konstant bleibt.

b) $G(t+1) = G(t) + 0{,}016 \cdot G(t) \cdot (S - G(t))$, t in Jahren, G (t) = Gewicht eines Lachses
Es gilt G (0) = 7,2 kg und G (1) = 10 kg

Einsetzen in das Wachstumsgesetz:
$10 = 7{,}2 + 0{,}016 \cdot 7{,}2 \cdot (S - 7{,}2) \rightarrow \frac{175}{7{,}2} = S - 7{,}2 \rightarrow S = 31{,}5$ kg

Ein Lachs kann demnach maximal 31,5 kg erreichen.

Die Anzahl der Jahre bis der Lachs mehr als 17kg wiegt, errechnet man mit Hilfe des Taschenrechners, bis G (t) > 17kg ist.

Es gilt G (3) = 17,3 also wird das Gewicht nach etwa 3 Jahren überschritten.