Zentrale Klassenarbeit Mathematik
Haupttermin 2007 (Baden-Württemberg)

Aufgabe zu Potenzen: (8 Punkte)

a) Vereinfache so weit wie möglich $\dfrac{5^{n+2} + 2 \cdot 5^{n}}{2 \cdot 5^{n} - 5^{n+1}}$

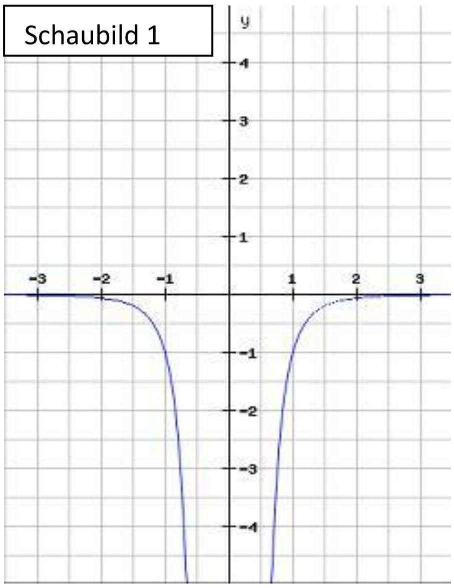
b) Löse die Gleichung $7^{x-3} - 49^{x} = 0$

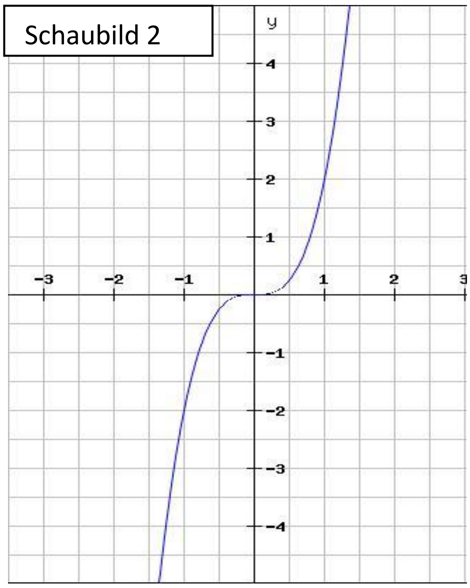
c) Die vier Bilder zeigen Schaubilder von Potenzfunktionen. Ordne die Funktionen mit den Gleichungen

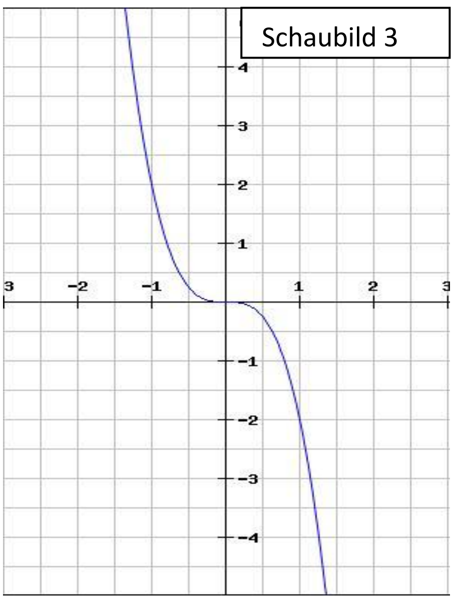
(1) $f(x) = -x^{4}$

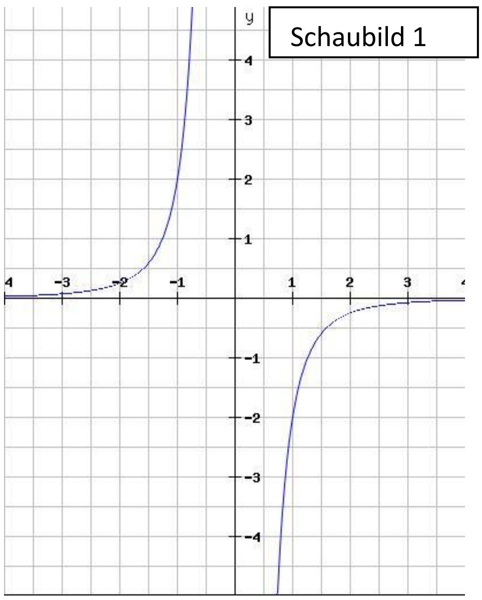
(2) $g(x) = 2x^{3}$

jeweils einem Schaubild zu. Gib für die übrigen Schaubilder einen möglichen Funktionsterm an.



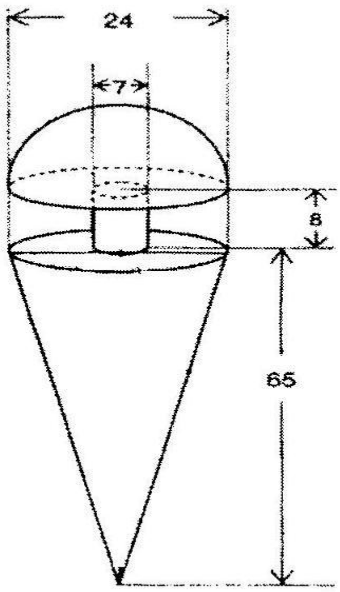






Aufgabe zur Körperberechnung: (8 Punkte)

Der abgebildete Flaschenverschluss ist zusammengesetzt aus einem Kreiskegel, einem Kreiszylinder und einer Halbkugel (siehe Abbildung; Maße in Millimeter).



a) Der Flaschenverschluss ist aus Stahl hergestellt. Berechne das Gewicht des Flaschenverschlusses, wenn 1cm³ Stahl 7,9g wiegt.

b) Wie tief steckt der Verschluss in einem Flaschenhals mit dem Innendurchmesser 18mm? Welchen Flächeninhalt hat der Teil des Kegelmantels, der sich dann innerhalb der Flasche befindet?

Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung: (8 Punkte)

Ein Würfel wurde so präpariert, dass die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 und die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit 0,1 auftritt. Die Augenzahlen 2,3,4 und 5 treten jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.

a) Der Würfel wird einmal geworfen.
Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augenzahlen an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Augenzahl zu erhalten?

b) Nun wird der Würfel dreimal geworfen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: Man erhält nur Sechsen
B: Man erhält immer die gleich Augenzahl
C: Man erhält genau eine Sechs

Aufgabe zum Wachstum: (12 Punkte)

Zu Beginn des Jahres 1960 hatte die Stadt Rechenhausen 30000 Einwohner, zu Beginn des Jahres 2005 waren es 50500. Zu Beginn des Jahres 1960 hatte die Stadt Lesewinkel 40000 Einwohner. Ihre Einwohnerzahl nahm seither infolge des Wegzugs der jungen Bevölkerung jährlich um 1% ab.

a) Um welchen Prozentsatz nahm die Einwohnerzahl von Rechenhausen jährlich zu, wenn man exponentielles Wachstum voraussetzt? In welchem Jahr konnten die Rechenhausener den 40000-ten Einwohner feiern?

b) In welchem Jahr hatten beide Städte gleich viele Einwohner?

c) Im Rechenhausener Stadtteil „Weststadt“ (1000 Einwohner) verbreitet sich ein Gerücht. Zu Anfang kannten zwei Einwohner das Gerücht, eine Stunde später wussten bereits zwei Weitere Einwohner davon. Man kann bei diesem Vorgang von logistischem Wachstum der Form: $B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (S - B(t))$ ausgehen.

Wie viele Einwohner kannten das Gerücht demnach nach 3 Stunden?
In der wievielten Stunde lag der stündliche Zuwachs erstmals über 15 Personen?

Zentrale Klassenarbeit Mathematik
Lösungsvorschlag zum Haupttermin 2007 (Baden-Württemberg)

Aufgabe zu Potenzen:

a) $\frac{5^{n+2} + 2 \cdot 5^n}{2 \cdot 5^n - 5^{n+1}} = \frac{5^n \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^n}{2 \cdot 5^n - 5^n \cdot 5^1} = \frac{5^n \cdot (5^2 + 2)}{5^n \cdot (2 - 5)} = \frac{27}{-3} = -9$

b) $7^{x-3} - 49^x = 0 \leftrightarrow 7^x \cdot 7^{-3} - 7^x \cdot 7^x = 0 \leftrightarrow 7^x \cdot (7^{-3} - 7^x) = 0$

Daraus ergibt sich entweder $7^x = 0$ oder $7^{-3} - 7^x = 0$
$7^x = 0$ besitzt keine Lösung.
$7^{-3} - 7^x = 0 \leftrightarrow 7^x = 7^{-3}$ Vergleich der Hochzahlen, da die Basis identisch ist: X = -3
Also L = {-3}

c) Das Schaubild von $f(x) = -x^{-4}$ ist eine Hyperbel, die durch die gerade Hochzahl symmetrisch zur Y-Achse verläuft. Dies wäre Schaubild 1.

Das Schaubild von $g(x) = 2x^3$ ist eine Parabel, die wegen der ungeraden Hochzahl symmetrisch zum Ursprung ist. Dies wäre Schaubild 2. Ein Punkt auf diesem Schaubild wäre z.B. P (1/2).

Funktionsgleichung zu Schaubild 3:
Die Hochzahl n bei x muss ungerade und positiv sein, zum Beispiel n = 3.
Ansatz: $f(x) = c \cdot x^3$
Zusätzlich muss der Punkt P (-1/2) auf dem Schaubild liegen.
Einsetzen: $2 = c \cdot (-1)^3 \rightarrow c = -2$
Funktionsgleichung von Schaubild 3: $f(x) = -2x^3$

Funktionsgleichung zu Schaubild 4:
Die Hochzahl n bei x muss ungerade und negativ sein, zum Beispiel n = -3.
Ansatz: $f(x) = c \cdot x^{-3}$
Zusätzlich muss der Punkt P (1/-2) auf dem Schaubild liegen.
Einsetzen: $-2 = c \cdot 1^3 \rightarrow c = -2$
Funktionsgleichung von Schaubild 4: $f(x) = -2x^{-3}$

Aufgabe zur Körperberechnung:

a) Für das Gewicht des Körpers muss das Gesamtvolumen berechnet werden:

$V_{Gesamt} = V_{Kegel} + V_{Zylinder} + V_{Halbkugel}$

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot 65 = 3120 \cdot \pi \text{ mm}^3$

$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 8 = 98 \cdot \pi \text{ mm}^3$

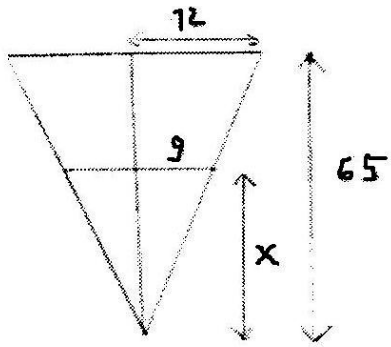
$V_{Halbkugel} = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 12^3 = 1152 \cdot \pi \text{ mm}^3$

$V_{Gesamt} = 4370 \cdot \pi \text{ mm}^3 \approx 13728{,}8 \text{ mm}^3 = 13{,}73 \text{ cm}^3$

Gewicht = $13{,}73 \cdot 7{,}9 = 108{,}5$g

b) Der Verschluss steckt nun in einem Flaschenhals.

Der Kreiskegel hat dann folgenden Querschnitt:



Mit Hilfe des 2. Strahlensatzes kann die Höhe x ermittelt werden, mit der der Verschluss in der Flasche steckt:

$$\frac{12}{9} = \frac{65}{x} \Leftrightarrow x = \frac{65 \cdot 9}{12} = 48{,}75 \text{ mm}$$

Der Verschluss steckt also mit einer Höhe von 4,875 cm im Flaschenhals.

Fläche des Kegelmantels, der sich innerhalb der Flasche befindet:
$M_{Kegel} = \pi \cdot r \cdot s$

Mantellinie $s = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{48{,}75^2 + 9^2} = 49{,}6$ mm

$M_{Kegel} = \pi \cdot 9 \cdot 49{,}6 = 1402{,}4 \text{ mm}^2$

Aufgabe zur Wahrscheinlichkeitsberechnung:

a) P (Augenzahl 1) = 0,3

P (Augenzahl 6) = 0,1

Für die restlichen Augenzahl 2,3,4 und 5 bleibt noch eine gesamte Restwahrscheinlichkeit von 1 – 0,3 – 0,1 = 0,6 übrig.

Da die Augenzahlen 2,3,4,5 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten können gilt:
P (2) = P (3) = P (4) = P (5) = 0,6:4 = 0,15

P (gerade Augenzahl) = P (2 oder 4 oder 6) = 0,15 + 0,15 + 0,1 = 0,4

b) P (A) = P (666) = $0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$
P (B) = P (111,222,333,444,555,666) = $0{,}3^3 + 0{,}15^3 + 0{,}15^3 + 0{,}15^3 + 0{,}15^3 + 0{,}1^3 = 0{,}0415$

Ereignis C: Genau eine Sechs bedeutet, dass man bei dreimaligem Werfen zweimal keine Sechs Und einmal genau Sechs würfelt.

Das Gegenereignis „keine Sechs" hat demnach eine Wahrscheinlichkeit von P = 0,9

P (6, keine 6, keine 6) = $0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}081$

Da die 6 aber auch als 2. oder 3. Gewürfelt werden könnte, gibt es noch 2 weitere Reihenfolgen für dieses Ereignis. Somit gilt: $0{,}081 \cdot 3 = 0{,}243$

Aufgabe zum Wachstum:

a) Exponentielles Wachstum: $B(t) = B(0) \cdot a^t$ mit t = Zeit ab 1960 in Jahren
Dann gilt: B (0) = 30000 und B (45) = 50500.
$B(t) = 30000 \cdot a^t$

Einsetzen aller Bedingungen: $50500 = 30000 \cdot a^{45} \leftrightarrow a = \sqrt[45]{\frac{50500}{30000}} = 1{,}0116$

Wachstumsgleichung: $B(t) = 30000 \cdot 1{,}0116^t$
Die Einwohnerzahl von Rechenhausen nimmt jährlich um 1,16% zu.

Wann konnte der 40000-te Einwohner gefeiert werden?

$$40000 = 30000 \cdot 1{,}0116^t \leftrightarrow \log\frac{40000}{30000} = \log\frac{4}{3} = t \cdot \log 1{,}0116 \leftrightarrow t = \frac{\log\frac{4}{3}}{\log 1{,}0116}$$
$= 24{,}9$ Jahre

Im Jahr 1984 konnte Rechenhausen den 40000-ten Einwohner feiern.

b) Um zu berechnen, wann beide Städte gleich viele Einwohner hatten, wird noch die Funktionsgleichung von Lesewinkel benötigt:

$B(t) = 40000 \cdot 0{,}99^t$ (t = Zeit in Jahren ab 1960)

Gleichsetzen der Gleichungen:

$$30000 \cdot 1{,}0116^t = 40000 \cdot 0{,}99^t \leftrightarrow \frac{3}{4} = \left(\frac{0{,}99}{1{,}0116}\right)^t \leftrightarrow \log\frac{3}{4} = t \cdot \log\frac{0{,}99}{1{,}0116}$$

$$\leftrightarrow t = \frac{\log 0{,}75}{\log\frac{0{,}99}{1{,}0116}} = 13{,}3$$

Nach ca. 13 Jahren und somit 1973 hatten beide Städte gleich viele Einwohner.

c) Die Sättigungsgrenze S liegt bei 1000 (1000 Einwohner im Stadtteil)

Ansatz: $B(t+1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot (1000 - B(t))$ t = Anzahl der Stunden

Es gilt $B(0) = 2$ und $B(1) = 4$

Einsetzen in die Gleichung: $B(1) = B(0) + k \cdot B(0) \cdot (1000 - B(0))$

$$4 = 2 + k \cdot 2 \cdot (1000 - 2) \leftrightarrow 2 = k \cdot 1996 \leftrightarrow k = \frac{1}{998}$$

Wachstumsgleichung: $B(t+1) = B(t) + \frac{1}{998} \cdot B(t) \cdot (1000 - B(t))$

Nun ermittelt man durch Einsetzen die weiteren Werte:

$B(2) = 8$; $B(3) = 16$; $B(4) = 32$

Demnach wissen nach 3 Stunden 16 Einwohner von dem Gerücht

Der stündliche Zuwachs beträgt zwischen der 3. und der 4. Stunde erstmals mehr als 15 Personen