<u>Mathematik-Klassenarbeit Nr. 3, Klasse 11</u>
<u>Thema: *Ganz- und gebrochenrationale Funktionen*</u>

1. Was versteht man unter einer ganzrationalen Funktion? Worin besteht der Unterschied zu gebrochenrationalen Funktionen? Geben Sie eine ganzrationale Funktion höchstens 6. Grades an, die symmetrisch zur y-Achse ist! Schreiben Sie ebenso eine ganzrationale Funktion höchstens 5. Grades auf, deren Schaubild zum Ursprung symmetrisch ist!

2. Gegeben sind folgende Funktionsgleichungen:

   a) $f(x) = -(1/x)$
   b) $g(x) = x^4 + x^3 - 12x^2$
   c) $h(x) = x / (5+2x)$

   Untersuchen Sie jeweils die Definitionsmenge, Symmetrieeigenschaften und Nullstellen der Funktionen!

3. Führen Sie eine Polynomdivision durch:
   $(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 9x - 2) : (x + 2)$

4. Bestimmen Sie durch Rechnung die Schnittpunkte der Schaubilder von:

   $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = x^2 - x - 5$

5. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - (9/8)$

   a) Bestimmen Sie durch Berechnung die Symmetrie von f!
   b) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion für $|x| \to \infty$
   c) Bestimmen Sie die Achsenabschnitte der Funktion!
   d) Die Gerade g geht durch die Kurvenpunkte P (-3 | f(-3)) und Q (0 | f(0)). Bestimmen Sie durch Rechnung die weiteren Schnittpunkte dieser Gerade mit dem Schaubild von f!

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

Ganzrationale Funktion: Polynome $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ mit maximal n Nullstellen

Gebrochenrationale Funktion: Quotient zweier ganzrationaler Funktionen

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m}$$

Symmetrisch zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$ → z.B. $f(x) = x^6 + 2x^4 + 3$

Symmetrisch zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$ → z.B. $f(x) = x^5 + 2x$

Aufgabe 2

a) $f(x) = -\frac{1}{x}$ Def.menge: $x \in \Re, x \neq 0$

Symmetrie: $f(x) = -f(-x)$ → symmetrisch zum Ursprung

Nullstellen: keine

b) $\mathrm{g(x) = x^4 + x^3 - 12x^2}$ Def.menge: $x \in \Re$

Symmetrie: $f(x) \neq f(-x)$ und $f(x) \neq -f(-x)$ → keine Symmetrie

Nullstellen: $0 = \mathrm{x^4 + x^3 - 12x^2}$ → $0 = x^2 \cdot (x^2 + x - 12)$ → $\underline{\underline{x_{01,02} = 0}}$

$0 = x^2 + x - 12$ → $\underline{\underline{x_{03} = 3}}$, $\underline{\underline{x_{04} = -4}}$

c) $h(x) = \frac{x}{5+2x}$ Def.menge: $x \in \Re, x \neq -\frac{5}{2}$

Symmetrie: $f(x) \neq f(-x)$ und $f(x) \neq -f(-x)$ → nicht symmetrisch zur y-Achse und nicht symmetrisch zum Ursprung

aber: symmetrisch zur vertikalen Achse durch $x = -\frac{5}{2}$

Nullstellen: $\underline{\underline{x_{01} = 0}}$

Aufgabe 3

$$\begin{array}{l}
(\mathrm{x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 9x - 2}) : (\mathrm{x} + 2) = \underline{\underline{\mathrm{x^3 - 4x - 1}}} \\
\underline{-(x^4 + 2x^3)} \\
\qquad 0 - 4x^2 - 9x \\
\qquad \underline{-(-4x^2 - 8x)} \\
\qquad\qquad -x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{-(-x - 2)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Aufgabe 4

$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2x + 1 \qquad g(x) = x^2 - x - 5$

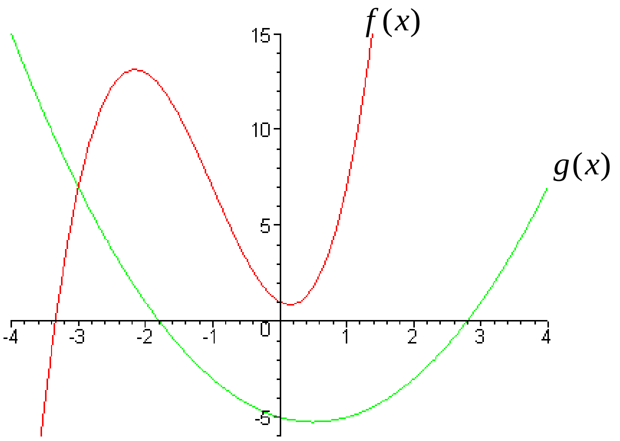
$2x^3 + 6x^2 - 2x + 1 = x^2 - x - 5$ → $0 = 2x^3 + 5x^2 - x + 6$ → Polynomdivision

$\underline{\underline{x_{01} = -3}}$ (durch probieren)

$(2x^3 + 5x^2 - x + 6) : (x+3) = \underline{2x^2 - x + 2}$ → $0 = 2x^2 - x + 2$ → $0 = x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

$$\begin{array}{l} \underline{-(2x^3 + 6x^2)} \\ \quad -x^2 - x \\ \quad \underline{-(-x^2 - 3x)} \\ \qquad 2x + 6 \\ \qquad \underline{-(2x+6)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

→ keine weiteren reellen Nullstellen, da negative Wurzel bei p-q-Formel
→ $\underline{\underline{S(-3/7)}}$



Aufgabe 5

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - \frac{9}{8}$

a) Symmetrie: $f(x) = f(-x)$?

$f(-x) = \frac{1}{8}(-x)^4 - (-x)^2 - \frac{9}{8} = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - \frac{9}{8} = f(x)$ → symmetrisch zur y-Achse

b) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{8}x^4 - x^2 - \frac{9}{8}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{x^2} - \frac{\frac{9}{8}}{x^4}\right) \underline{\underline{\to +\infty}}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{8}x^4 - x^2 - \frac{9}{8} \right) = \lim_{x \to -\infty} x^4 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{x^2} - \frac{\frac{9}{8}}{x^4} \right) \underline{\underline{\rightarrow +\infty}}$$

c) Schnittpunkt mit der y-Achse: $\underline{\underline{S_y(0/-\frac{9}{8})}}$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $0 = \frac{1}{8}x^4 - x^2 - \frac{9}{8} \rightarrow 0 = x^4 - 8x^2 - 9 \rightarrow z = x^2 \rightarrow$

$0 = z^2 - 8x - 9 \rightarrow z_1 = 9 \quad \rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \underline{\underline{\pm 3}}$

$z_2 = -1 \quad \rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{-1}$ keine reellen Lösungen

Achsenabschnitte ermitteln:

S_y mit $x_1 \rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{-\frac{9}{8}} = 1 \rightarrow \underline{\underline{y_1 = \frac{3}{8}x - \frac{9}{8}}}$

S_y mit $x_2 \rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{-\frac{9}{8}} = 1 \rightarrow \underline{\underline{y_2 = -\frac{3}{8}x - \frac{9}{8}}}$