Klasse 11 b **2. Schulaufgabe aus der Mathematik**

---

1. **Funktionenschar**

   Gegeben ist die Funktionenschar

   $$f_a: \quad x \mapsto ax^2 + (-4a - 2)\,x + 9, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   a) Zeichne die Grafen G_0, G_1 und $G_{-1/2}$ zu den Parameterwerten $a = 0$, 1 und $-\frac{1}{2}$. Das Koordinatensystem mit Längeneinheit 1 cm soll durch die Punkte $(-2|0)$ und $(6|9)$ aufgespannt werden.

   b) Zeige (durch Rechnung), dass genau zwei Punkte A und B allen Graphen der Schar angehören.

   Gib die Koordinaten von A und B an.

   c) Wie muss a gewählt werden, damit G_a durch den Punkt $C\,(2|3)$ geht?

2. **Monotonie und Umkehrfunktion**

   Gegeben ist die Funktion

   $$f: \quad x \mapsto \frac{1}{x-4}\,, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}\,.$$

   a) Welche Monotonie weist f im Intervall $]4;\infty[$ auf? (Beweis!)

   b) Stelle die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion von f in expliziter Form auf.

   c) Ist strenge Monotonie ein hinreichendes oder notwendiges Kriterium für Umkehrbarkeit? (Zwei Begründungen!)

3. **Symmetrie von Funktionsgraphen**

   a) Welche Symmetrie weist der Graph der Funktion

   $$f: \quad x \mapsto \frac{4\sin x}{4 - x^2}\,, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

   auf? (Beweis!)

   b) Zeige: Der Graph der Funktion

   $$g: \quad x \mapsto \frac{2}{x^2 - 4x}\,, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$$

   ist achsensymmetrisch zur Achse $x = 2$.

4. **Nullstellen ganzrationaler Funktionen**

   Gegeben ist die Funktion

   $$f: \quad x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 2\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,.$$

   Bestimme die Nullstellen von G_f.

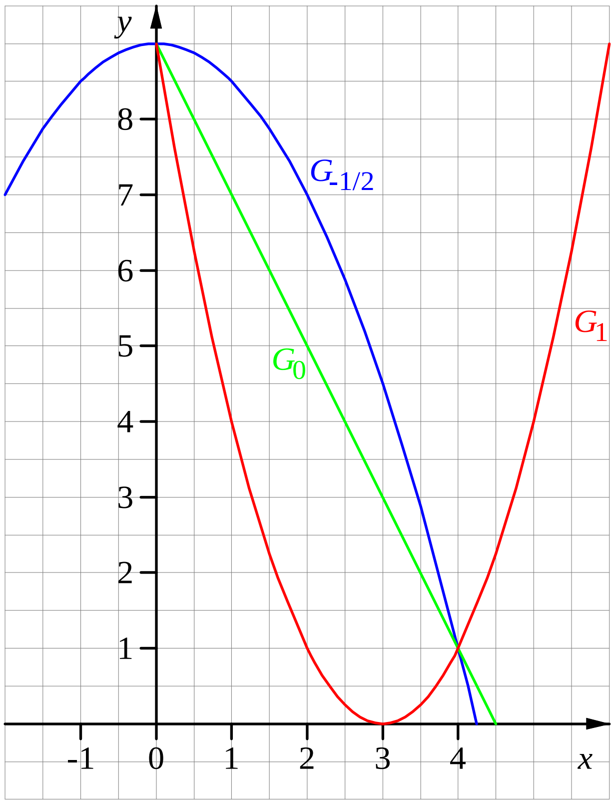
Viel Erfolg!

1. $f_a: \quad x \mapsto ax^2 + (-4a-2)\,x + 9, \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$

   a) $f_0(x) = -2x + 9$, Gerade mit Steigung -2 durch $(0|9)$,

   $f_1(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, Normalparabel mit Scheitel $(3|0)$,

   $f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 9$, mit $-\frac{1}{2}$ gestreckte Parabel, Scheitel $(0|9)$.



   b) Gemeinsame Punkte sind Schnittpunkte von G_a und G_b $(a \neq b)$:

$$ax^2 + (-4a-2)\,x + 9 = bx^2 + (-4b-2)\,x + 9$$
$$ax^2 - 4xa - 2x + 9 = bx^2 - 4xb - 2x + 9$$
$$ax^2 - bx^2 - 4xa + 4xb = 0$$
$$x^2(a-b) - 4(a-b)\,x = 0$$
$$x\,[x(a-b) - 4(a-b)] = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{4(a-b)}{a-b} = 4$$

Funktionswerte:

$$f_0(x) = -2x + 9$$
$$f_0(0) = 9$$
$$f_0(4) = 1$$

Die Graphen haben also nur die Punkte $A(0|9)$ und $B(4|1)$ gemeinsam.

c) $C\,(2|3) \in G_a$:

$$\begin{aligned} f_a\,(2) &= 3 \\ a \cdot 2^2 + (-4a-2) \cdot 2 + 9 &= 3 \\ -4a + 5 &= 3 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. $f: \quad x \mapsto \dfrac{1}{x-4}\,, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

a) Monotonie im Intervall $]4;\infty[$:

Es seien $x_2 > x_1 > 4$.

$$\begin{aligned} f\,(x_2) - f\,(x_1) &= \frac{1}{x_2-4} - \frac{1}{x_1-4} = \frac{(x_1-4)-(x_2-4)}{(x_2-4)\,(x_1-4)} \\ &= \frac{x_1-4-x_2+4}{(x_2-4)\,(x_1-4)} = \frac{\overbrace{x_1-x_2}^{<0,\text{ da } x_1<x_2}}{\underbrace{(x_2-4)}_{>0,\text{ da } x_1>4}\underbrace{(x_1-4)}_{>0,\text{ da } x_2>4}} < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist in $]4;\infty[$ streng monoton fallend

b) Umkehrfunktion:

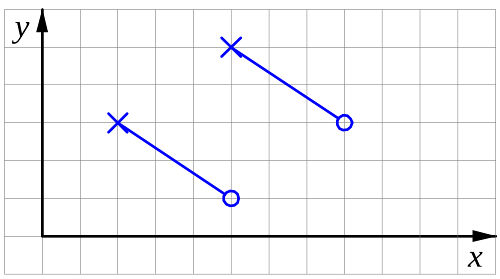
$$\begin{aligned} f: \quad y &= \frac{1}{x-4} \\ y\,(x-4) &= 1 \\ xy - 4y &= 1 \\ xy &= 1 + 4y \\ x &= \frac{1}{y} + 4 \\ f^{-1}: \quad y &= \frac{1}{x} + 4, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

c)
- Strenge Monotonie ist hinreichend für Umkehrbarkeit, denn aus

  $$\forall\, x_1 < x_2: \quad f\,(x_2) \lessgtr f\,(x_1) \quad \left(\text{streng monoton } \begin{matrix}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{matrix}\right)$$

  folgt $\quad \forall\, x_1 < x_2: \quad f\,(x_2) \neq f\,(x_1) \quad$ (umkehrbar)

- Strenge Monotonie ist nicht notwendig für Umkehrbarkeit. Gegenbeispiel:



3. a) Symmetrie von $f: \quad x \mapsto \dfrac{4\sin x}{4-x^2}\ , \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$?

$$f(-x) = \frac{4\sin(-x)}{4-(-x)^2} = \frac{-4\sin x}{4-x^2} = -f(x)$$

$\Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Ursprung

b) Zeige: $g: \quad x \mapsto \dfrac{2}{x^2-4x}\ , \quad D_f = \mathbb{R}\setminus\{0; 4\}$ ist achsensymmetrisch zur Achse $x = 2$.

Zeige:

$$g(2-h) = g(2+h)$$

$$\begin{aligned} \text{L.S.} = (2-h) &= \frac{2}{(2-h)^2 - 4\cdot(2-h)} = \frac{2}{4-4h+h^2-8+4h} \\ &= \frac{2}{-4+h^2} \\ \text{R.S.} = g(2+h) &= \frac{2}{(2+h)^2 - 4\cdot(2+h)} = \frac{2}{4+4h+h^2-8-4h} \\ &= \frac{2}{-4+h^2} = \text{L.S.} \Rightarrow \text{Behauptung} \end{aligned}$$

4. Nullstellen von $f: \quad x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 2\ , \quad D_f = \mathbb{R}$.

Nach dem Teilersatz kommen als ganzzahlige Nullstellen in Frage: $-2, -1, 1, 2$.

Offenbar ist 2 eine Nullstelle.

Polynomdivision:

$$\left(x^3 - 6x^2 + 9x - 2\right) : (x-2) = x^2 - 4x + 1$$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (-4)^2 - 4 = 12 \\ x_{1,2} &= \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{12}\right) = \frac{1}{2}\left(4 \pm 2\sqrt{3}\right) \\ &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Nullstellen liegen bei $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$ und 2.