1. **Funktionsgrafen**

   Zeichne in ein Koordinatensystem, das durch die Punkte $(-5|-5)$ und $(5|5)$ aufgespannt wird, die Grafen folgender Funktionen ($1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$).

   a) $f: \quad x \mapsto |2x| - 4 \;, \quad D_f = \mathbb{R} \;,$ b) $g: \quad x \mapsto \left|\frac{2}{3}(x-1)\right| \;, \quad D_g = \mathbb{R} \;.$

2. **Tangente und Sekante**

   Gegeben ist die Funktion

   $$f: \quad x \mapsto \tfrac{1}{4}x^2 - x - 1 \;, \quad D_f = \mathbb{R} \;.$$

   a) Bestimme die Koordinaten des Scheitels des Funktionsgrafen G_f.

   b) Zeichne den Funktionsgrafen G_f in ein durch die Punkte $(-3|-4)$ und $(7|5)$ aufgespanntes Koordinatensystem ($1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$).

   c) Stelle den Funktionsterm $s(x)$ derjenigen Geraden s auf, welche G_f an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 6$ schneidet. (Teilergebnis: Steigung $= \frac{1}{2}$)

   d) Bestimme den Funktionsterm $t(x)$ derjenigen Parallelen zu s (aus Teilaufgabe c), welche G_f an der Stelle 3 schneidet oder berührt.

   e) Zeichne die Grafen der Geraden s und t aus den Teilaufgaben c und d in das Koordinatensystem aus a.

3. **Tangente und Normale**

   Gegeben ist die Funktion

   $$f: \quad x \mapsto \tfrac{1}{2}(x+1)^2 - \tfrac{3}{2} \;, \quad D_f = \mathbb{R} \;,$$

   ferner der Punkt $P(2|3) \in G_f$. Der Funktionsgraf von f werde G_f genannt.

   a) Bestimme die Nullstellen von G_f.

   b) Zeichne G_f und P in ein Koordinatensystem, das durch die Punkte $(-5|-3)$ und $(5|5)$ aufgespannt wird ($1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$).

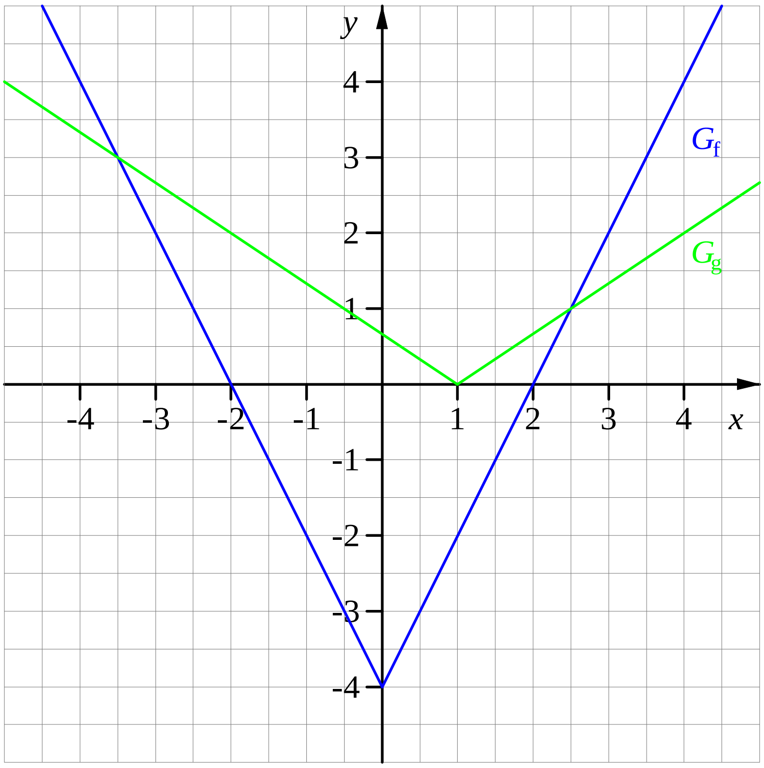
   c) Bestimme die Gleichungen aller Geraden, welche mit G_f jeweils genau den einen Punkt P gemeinsam haben (2 Lösungen!)
   (Teilergebnis: Steigung der Tangente $= 3$)

   d) Gib den Funktionsterm derjenigen Geraden an, welche im Punkt P auf der Tangente an G_f (Teilaufgabe c) senkrecht steht.

   e) Zeichne die drei Geraden aus den Teilaufgaben c und d in das bestehende Koordinatensystem.

Viel Erfolg!

1.

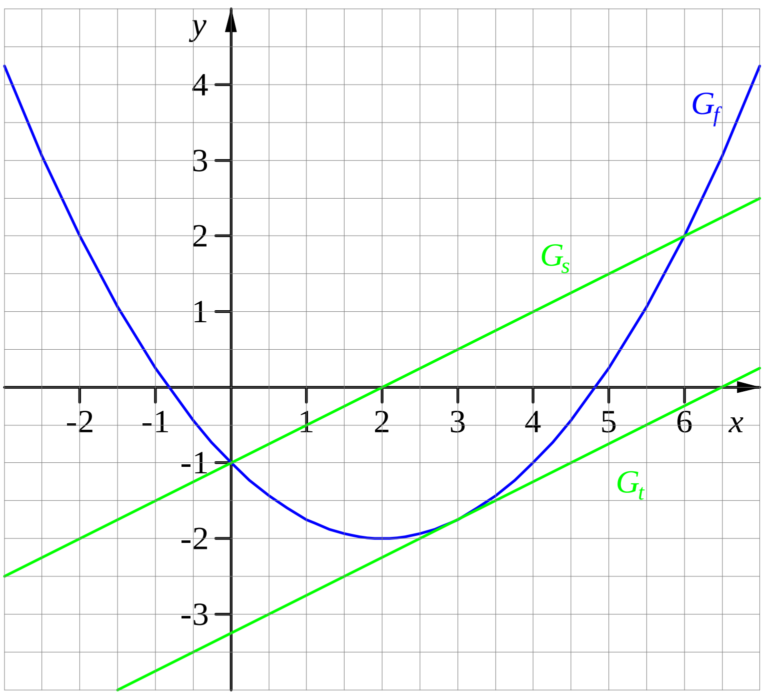


2. Gegeben: $$f: \quad x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - x - 1 \;, \quad D_f = \mathbb{R} \;.$$

a) Scheitelform:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 1 = \frac{1}{4}\left[x^2 - 4x + 4 - 4\right] - 1 = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 2 \qquad \Rightarrow S\,(2|-2)$$

b)



c) y-Werte:

$$f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^2 - 0 - 1 = -1$$
$$f(6) = \frac{1}{4} \cdot 6^2 - 6 - 1 = 2$$

Zwei-Punkte-Form:

$$s: \quad y = \frac{2+1}{6-0}(x-0) - 1 = \frac{1}{2}x - 1$$

d) y-Wert:

$$f(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^2 - 3 - 1 = -\frac{7}{4}$$

Punkt-Richtungs-Form:

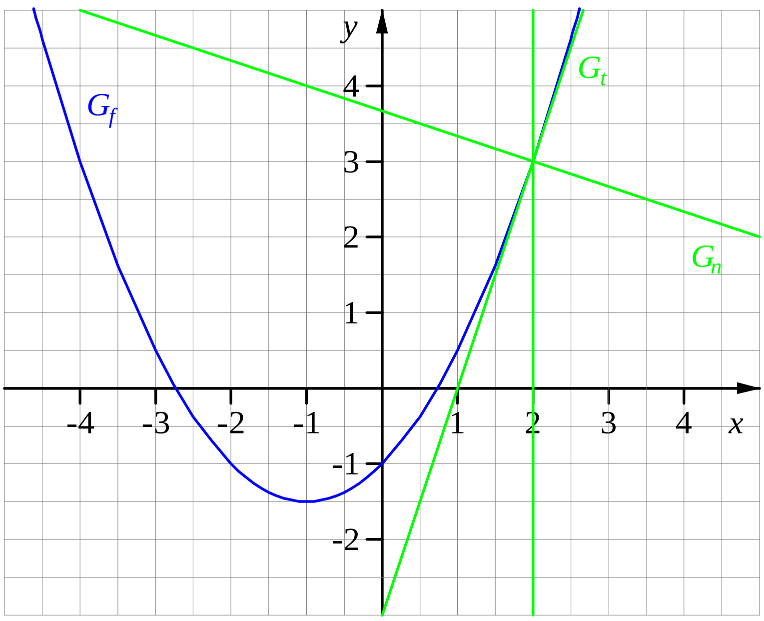
$$t: \quad y = \frac{1}{2} \cdot (x-3) - \frac{7}{4} = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4} = \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{4}$$

e) Siehe unter Teilaufgabe a.

3. $$f: \quad x \mapsto \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x - 1\,, \quad D_f = \mathbb{R}\,, \qquad P(2|3)$$

a) Nullstellen:
$$\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{3}{2} = 0$$
$$\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$$
$$D = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = 3$$
$$x_{12} = \frac{1}{1}\left(-1 \pm \sqrt{3}\right)$$
$$x_1 = -1 - \sqrt{3}, \qquad x_2 = -1 + \sqrt{3}$$

b) Scheitel: $S\left(-1| - 1\frac{1}{2}\right)$



c) Erste Lösung:

$$x = 2$$

Zweite Lösung:

Geradenbüschel durch $P\,(2|3)$:

$$y = a\,(x-2) + 3 = ax - 2a + 3$$

Fordere eine Lösung der Schnittstellengleichung:

$$\begin{aligned} ax - 2a + 3 &= \frac{1}{2}x^2 + x - 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + x\,(1-a) + 2a - 4 &= 0 \\ D = (1-a)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2a-4) &= a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2 \end{aligned}$$

Die Forderung nach $D = 0$ führt zur Steigung $a = 3$. Somit:

$$t: \quad y = 3\,(x-2) + 3 = 3x - 3$$

d) Lotgerade durch $P\,(2|3)$:

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{3} \\ n: \quad y &= -\frac{1}{3}\,(x-2) + 3 = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3} \end{aligned}$$

e) Siehe unter Teilaufgabe b.