Name: ....

Klasse 11

3. Klausur in Mathematik

Thema: Kurvenscharen und Analytische Geometrie

Bitte beachten: Kommentieren Sie stichwortartig Ihre Ansätze und gliedern Sie Ihre Rechnungen. Markieren Sie Ihre Ergebnisse und formulieren Sie bitte auch kurze Antwortsätze.

Aufgabe 1

[45 %]

Gegeben sei die Kurvenschar $f_a(x) = ax^3 - 4x$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

b) Zeichnen Sie die Graphen f_1 und f_4 für $-2 \leq x \leq 2$.

c) Für welche Werte von a hat f_a keine Extrema? Begründen Sie Ihre Angabe.

d) Gibt es Kurven der Schar, die genau eine Nullstelle besitzen? Begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 2

[45 %]

Gegeben sind die Punkte $A(3/7/2)$, $B(-1/5/1)$ und $C(2/3/0)$.

a) Welche der Punkte A, B, C liegen innerhalb der Ursprungskugel mit dem Radius 5?

b) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$.

c) Berechnen Sie die Vektoren $\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{c}$ und $\vec{y} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b}$.

d) Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein ebenes Dreieck bilden.

e) Zeigen Sie (rechnerisch), dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

f) Bestimmen Sie für das Viereck $ABCD$ den Punkt D so, dass ein Parallelogramm entsteht.

Aufgabe 3

[10 %]

Beweisen Sie unter Verwendung der Spaltenschreibweise für Vektoren im Raum die folgende Rechenregel: $-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$

Viel Erfolg!

Erreichte Punktzahl: ______ von 60 Punkten

Note:

1	2	3	4	5	6	Ø

Lösungen

Aufgabe 1

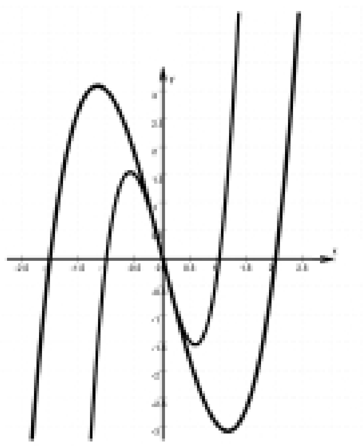
a)
$$f_a'(x) = 3ax^2 - 4$$
$$f_a''(x) = 6ax$$
$$f_a'''(x) = 6a$$

Nullstellen: $N_1(0/0),\ N_2\left(\sqrt{\frac{4}{a}}/0\right),\ N_3\left(-\sqrt{\frac{4}{a}}/0\right)$

Extrema: $Min\left(\sqrt{\frac{4}{3a}} \Big/ -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3a}}\right),\ Max\left(-\sqrt{\frac{4}{3a}} \Big/ \frac{8}{3}\sqrt{\frac{4}{3a}}\right)$

Wendepunkt: $W(0/0)$

b)



c) $a = 0$: Der Nenner ist Null, der Radikand ist nicht definiert.

$a < 0$: Der Radikand ist negativ und somit nicht definiert.

Für $a \leq 0$ hat $f_a(x)$ keine Extrema.

d) $a = 0$: Der Nenner ist Null, der Radikand ist nicht definiert.

$a < 0$: Der Radikand ist negativ und somit nicht definiert.

Für $a \leq 0$ hat $f_a(x)$ nur die Nullstelle $N(0/0)$.

Aufgabe 2

a)
$$|0A| \approx 7{,}87$$
$$|0B| \approx 5{,}2$$
$$|0C| \approx 3{,}61$$

Nur der Punkt C liegt innerhalb der Ursprungskugel mit dem Radius 5.

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix};\quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Die drei Vektoren sind komplanar.

e) $|AB| = \sqrt{21};\quad |CA| = \sqrt{21}$

f) $D = (6/5/1)$

Aufgabe 2

$$-\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = -\left[\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}\right] = -1\begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1(x_a + x_b) \\ -1(y_a + y_b) \\ -1(z_a + z_b) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -x_a - x_b \\ -y_a - y_b \\ -z_a - z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_a \\ -y_a \\ -z_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = -\vec{a} - \vec{b}$$