Mathematik-Klassenarbeit Nr.4 Klasse 11a

Name:____________________

Hinweis: Achte bitte auf saubere und korrekte Darstellung. Sie wird mitbewertet

Aufgabe 1:

[5 P] Bestimme die erste und die zweite Ableitung der Funktionen f und g.

$f(x)=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{20x^4}-\cos x$ $\quad g(t)=\frac{1}{2}\cos t-a\sin t+\sin a-a$

Aufgabe 2:

[1,5 P]

Kreuze die richtige Lösung an:

Die Gleichung sin(x)=c hat ....

- O für c > 1 keine Lösung.
- O für c < -1 keine Lösung.
- O für c= 0,75 im Intervall [0;π] genau zwei Lösungen.
- O für c= 0,75 im Intervall [-π;0] genau zwei Lösungen.

Aufgabe 3:

[4,5 P]

Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen.

a) $f(x)=16x^4-40x^2+9$ b) $f(x)=3u^2-\frac{1}{3}u^4$

Aufgabe 4:

[8 P]

Gegeben ist die Funktion mit $f(x)=-x^3+2x^2+x-2$.

a) Berechne die Nullstellen von f.

b) Untersuche, ob die Funktion symmetrisch zur Y-Achse oder zum Ursprung ist.

c) Untersuche das Verhalten für $x\to\pm\infty$.

d) Skizziere mit Hilfe dieser Ergebnisse das Schaubild von f.

Aufgabe 5:

[6 P]

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^3+4x-3, & x\geq 2\\ 2x-t; & x\leq 2\end{cases}$$

a) Für welches t ist f(x) stetig an der Stelle $x_0=2$?

b) Ist f für dieses t auch differenzierbar?

c) Verändere f so, dass die Funktion stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Viel Erfolg!!

Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20x^4} - \cos x$$

$$f'(x) = \frac{4}{12} \cdot x^3 + \frac{1}{20} \cdot (-4) \cdot \frac{1}{x^5} + \sin x \rightarrow \underline{\underline{f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{5x^5} + \sin x}}$$

$$f''(x) = x^2 - \frac{1}{5} \cdot (-5) \cdot \frac{1}{x^6} + \cos x \rightarrow \underline{\underline{f''(x) = x^2 + \frac{1}{x^6} + \cos x}}$$

$$g(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos t - a \cdot \sin t + \sin a - a$$

$$\underline{\underline{g'(t) = -\frac{1}{2} \cdot \sin t - a \cdot \cos t}} \qquad \underline{\underline{g''(t) = -\frac{1}{2} \cdot \cos t + a \cdot \sin t}}$$

Aufgabe 2

Richtige Lösungen: die ersten drei

Aufgabe 3

a) $f(x) = 16x^4 - 40x^2 + 9 \rightarrow \underline{x^2 = z} \rightarrow f(z) = 16z^2 - 40z + 9 \rightarrow 0 = 16z^2 - 40z + 9$

$\rightarrow z_{01} = 2{,}25 \rightarrow \underline{\underline{x_{01,02} = \pm 1{,}5}}$

$\rightarrow z_{02} = 0{,}25 \rightarrow \underline{\underline{x_{03,04} = \pm 0{,}5}}$

b) $f(u) = 3u^2 - \frac{1}{3}u^4 \rightarrow 0 = 3u^2 - \frac{1}{3}u^4 \rightarrow 0 = u^2 \cdot (3 - \frac{1}{3}u^2) \rightarrow \underline{\underline{u_{01,02} = 0}} \rightarrow$

$0 = 3 - \frac{1}{3}u^2 \rightarrow \underline{\underline{u_{03,04} = \pm 3}}$

Aufgabe 4

$f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$

a) Nullstellen: $0 = -x^3 + 2x^2 + x - 2$ → $\underline{\underline{x_{01} = -1}}$ (durch probieren) → Polynomdivision →
$(-x^3 + 2x^2 + x - 2) : (x+1) = -x^2 + 3x - 2$ → $\underline{\underline{x_{02} = 2}}$, $\underline{\underline{x_{03} = 1}}$

b) Symmetrie:
$f(x) = f(-x)$? → $f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x)^2 + (-x) - 2 = x^3 + 2x^2 - x - 2 \neq f(x)$
→ nicht symmetrisch zur y-Achse

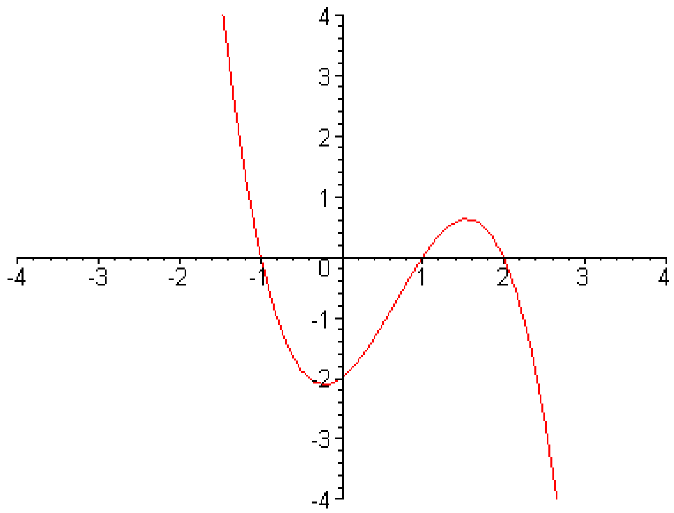
$f(x) = -f(-x)$? → $-f(-x) = -(-(-x)^3 + 2(-x)^2 + (-x) - 2) = -(x^3 + 2x^2 - x - 2) \neq f(x)$
→ nicht symmetrisch zum Ursprung

c) Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x^3 + 2x^2 + x - 4\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(-1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) \underline{\underline{\to -\infty}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3 + 2x^2 + x - 4\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \left(-1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) \underline{\underline{\to +\infty}}$$

d)



Aufgabe 5

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3 & x \geq 2 \qquad f(2) = 3 \\ 2x - t & x \leq 2 \qquad f(2) = 3 \end{cases}$$

a) $x_0 = 2$

von rechts:

$$\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot(2+\frac{1}{n})^2 + 4\cdot(2+\frac{1}{n}) - 3\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n} + 3\right) = \underline{\underline{3}}$$

von links:

$$\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot(2-\frac{1}{n})^2 + 4\cdot(2-\frac{1}{n}) - 3\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{n} + 3\right) = \underline{\underline{3}}$$

$\lim_{x\to 2}(2x - t) = \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot(2+\frac{1}{n}) - t\right) = \lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{2}{n} - t\right) \rightarrow$ für $\underline{\underline{t = 1}}$ ist $f(x)$ stetig in $x_0 = 2$.

$$\lim_{x\to 2}(2x - 1) = \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot(2+\frac{1}{n}) - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{2}{n} - 1\right) = \underline{\underline{3}}$$

b)

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-\frac{1}{2}(x+h)^2 + 4(x+h) - 3 - (-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{-xh - h^2 + 4h}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{h\cdot(-x - h + 4)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(-2 - h + 4) = \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2(x+h) - 1 - (2x-1)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2x + 2h - 1 - 2x + 1}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2h}{h}\right) = \underline{\underline{2}}$$

$\rightarrow$ differenzierbar in $x_0 = 2$ für $t = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3 & x > 2 \\ 2x - 1 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$

stetig, aber nicht differenzierbar in $x_0 = 2$