

## 9b Klassenarbeit Nr.1.

### Aufgabe 1

Bestimme rechnerisch die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

a)

$$2x - (3y + 2) = 2z + 8 \quad (1)$$

$$y - (x + z) = 2 \quad (2)$$

$$z + (x - 1) = 3z - 6 \quad (3)$$

### Aufgabe 1b)

$$x + 3y - 4z = 1 \quad (4)$$

$$3x - 2y + z = 0 \quad (5)$$

$$-3x + 2y - z = 2 \quad (6)$$

### Aufgabe 2

Mittels einer speziellen Pistole, die gleichzeitig mit dem Knall eine Rauchwölkchen ausstößt, soll die Schallgeschwindigkeit in Luft gemessen werden. Die Messstrecke ist 1048 m lang. Um den Einfluss des Windes auszuschalten, werden 2 Messungen durchgeführt. In Windrichtung beträgt die Laufzeit des Knalls 3,0 s, entgegen der Windrichtung 3,2 s.

Berechne die Schallgeschwindigkeit bei Windstille  $v_{\text{Schall}}$  und die Windgeschwindigkeit  $v_{\text{Wind}}$ .

### Aufgabe 3

Ermittle zeichnerisch die Lösungsmenge:

a)

$$2y \leq x + 2 \quad (7)$$

$$x + 2y \geq -3 \quad (8)$$

### Aufgabe 3b)

$$x + y - 3 = 0 \quad (9)$$

$$2y = -9 - x \quad (10)$$

## Aufgabe 1 a) - Lösung:

$$L = \left\{ -\frac{57}{7}, -\frac{54}{7}, -\frac{11}{7} \right\}$$

### möglicher Lösungsweg:

Ausgangsgleichung:

$$2x - (3y + 2) = 2z + 8$$

$$y - (x + z) = 2$$

$$z + (x - 1) = 3z - 6$$

Gleichungssystem:

$$2x - 3y - 2 = 2z + 8$$

$$y - x - z = 2$$

$$z + x - 1 = 3z - 6$$

Umformen und sortieren (Variablen alphabetisch links, Konstanten rechts):

$$2x - 3y - 2z = 10$$

$$-x + y - z = 2$$

$$x - 2z = -5$$

Stelle die Koeffizientenmatrix auf.

Reihenfolge der Variablen: x, y, z, Konstante

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & -2 & 10 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \end{array}$$

Durch Division der 1. Zeile durch 2 wird das Diagonalelement zu 1 gemacht:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \end{array}$$

Mit der 1. Zeile werden alle anderen Zeilen in der 1. Spalte auf 0 gebracht.

Zur 2. Zeile wird die 1. Zeile addiert:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 7 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \end{array}$$

Zur 3. Zeile wird das -1fache der 1. Zeile addiert:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 7 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -10 \end{array}$$

Durch Multiplikation der 2. Zeile mit -2 wird das Diagonalelement zu 1 gemacht:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -14 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -10 \end{array}$$

Mit der 2. Zeile werden alle anderen Zeilen in der 2. Spalte auf 0 gebracht.

Zur 1. Zeile wird das 3/2fache der 2. Zeile addiert:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & -16 \\ 0 & 1 & 4 & -14 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -10 \end{array}$$

Zur 3. Zeile wird das  $-3/2$ fache der 2. Zeile addiert:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & - 16 \\ 0 & 1 & 4 & - 14 \\ 0 & 0 & - 7 & 11 \end{array}$$

Durch Division der 3. Zeile durch  $-7$  wird das Diagonalelement zu 1 gemacht:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & - 16 \\ 0 & 1 & 4 & - 14 \\ 0 & 0 & 1 & - \frac{11}{7} \end{array}$$

Mit der 3. Zeile werden alle anderen Zeilen in der 3. Spalte auf 0 gebracht.

Zur 1. Zeile wird das  $-5$ fache der 3. Zeile addiert:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & - \frac{57}{7} \\ 0 & 1 & 4 & - 14 \\ 0 & 0 & 1 & - \frac{11}{7} \end{array}$$

Zur 2. Zeile wird das  $-4$ fache der 3. Zeile addiert:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & - \frac{57}{7} \\ 0 & 1 & 0 & - \frac{54}{7} \\ 0 & 0 & 1 & - \frac{11}{7} \end{array}$$

$$L = \left\{ -\frac{57}{7}, -\frac{54}{7}, -\frac{11}{7} \right\}$$

### Aufgabe 1b)

$$x + 3y - 4z = 1 \quad (14)$$

$$3x - 2y + z = 0 \quad (15)$$

$$-3x + 2y - z = 2 \quad (16)$$

#### Lösung:

Genaues hinschauen ergibt den kürzesten Weg:

(15)+(16) ergibt:

$$0 = 2$$

Keine noch so tolle Kombination von  $x, y$  und  $z$  könnte diese falsche Aussage noch retten. Somit folgt für die Lösungsmenge:

$$L = \{\}$$

### Aufgabe 2

Mittels einer speziellen Pistole, die gleichzeitig mit dem Knall eine Rauchwölkchen ausstößt, soll die Schallgeschwindigkeit in Luft gemessen werden. Die Messstrecke ist 1048 m lang. Um den Einfluss des Windes auszuschalten, werden 2 Messungen durchgeführt. In Windrichtung beträgt die Laufzeit des Knalls 3,0 s, entgegen der Windrichtung 3,2 s.

Berechne die Schallgeschwindigkeit bei Windstille  $v_{\text{Schall}}$  und die Windgeschwindigkeit  $v_{\text{Wind}}$ .

#### Lösung:

Wenn sich der Schall und der Wind in die gleiche Richtung bewegen, dann addieren sich die

beiden Geschwindigkeiten zur Gesamtgeschwindigkeit  $v_{\text{Schall}} + v_{\text{Wind}}$ .

Wenn sich der Schall und der Wind in entgegengesetzte Richtungen bewegen, dann subtrahieren sich die beiden Geschwindigkeiten und man erhält  $v_{\text{Schall}} - v_{\text{Wind}}$ .

Geschwindigkeit ist immer Strecke  $S$  pro Zeit  $t$ . Also:

$$v = \frac{S}{t} \quad (17)$$

Man erhält also das Gleichungssystem:

$$v_{\text{Schall}} + v_{\text{Wind}} = \frac{1048 \text{ m}}{3,0 \text{ s}} \quad (18)$$

$$v_{\text{Schall}} - v_{\text{Wind}} = \frac{1048 \text{ m}}{3,2 \text{ s}} \quad (19)$$

Addition von (18) und (19) ergibt:

$$2 \cdot v_{\text{Schall}} = \frac{1048 \text{ m}}{3,0 \text{ s}} + \frac{1048 \text{ m}}{3,2 \text{ s}} \quad (20)$$

$$= 676,833 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (21)$$

Somit ist  $v_{\text{Schall}} = 338,417 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Eingesetzt in 18 ergibt:

$$338,417 \frac{\text{m}}{\text{s}} + v_{\text{Wind}} = \frac{1048 \text{ m}}{3,0 \text{ s}} \quad (22)$$

$$= 349,333 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (23)$$

Somit ist die Windgeschwindigkeit  $v_{\text{Wind}} = 10,917 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Die Schallgeschwindigkeit beträgt  $v_{\text{Schall}} = 338,417 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Die Windgeschwindigkeit beträgt  $v_{\text{Wind}} = 10,917 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

### Aufgabe 3

Ermittle zeichnerisch die Lösungsmenge:

a)

$$2y \leq x + 2 \quad (24)$$

$$x + 2y \geq -3 \quad (25)$$

**Lösung:**

Umstellen der Gleichungen ergibt:

$$y \leq 0,5x + 1 \quad (26)$$

$$y \geq -0,5x - 1,5 \quad (27)$$

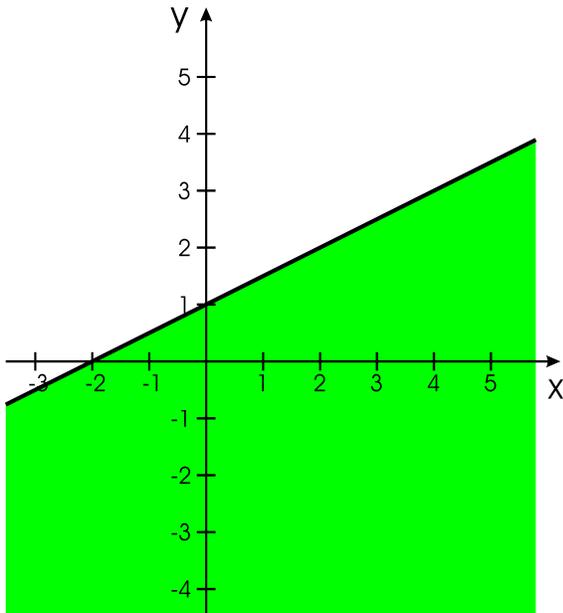


Abbildung 1:  $y \leq 0,5x + 1$

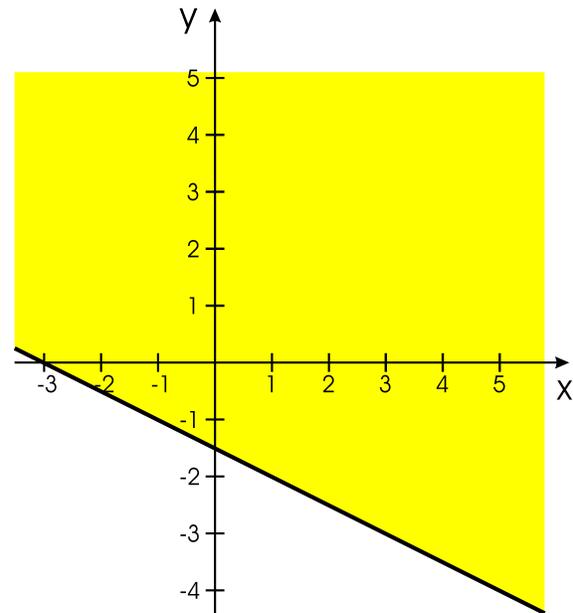


Abbildung 2:  $y \geq -0,5x - 1,5$

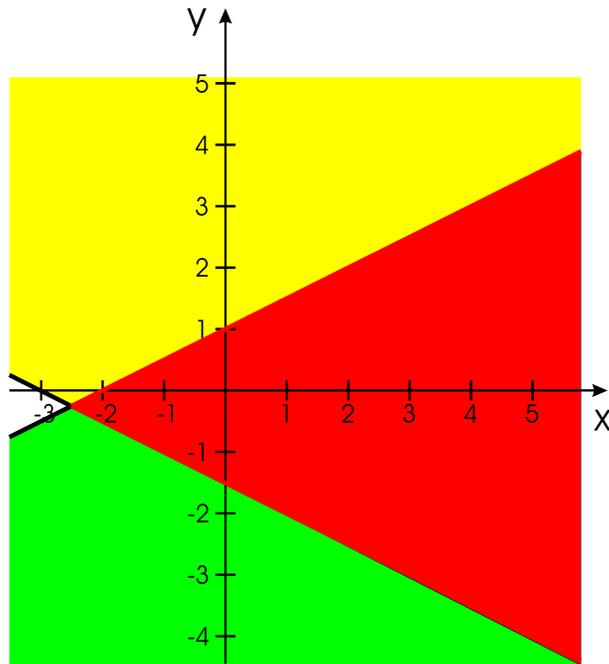


Abbildung 3: Lösungsmenge - die Geraden gehören von ihrem Schnittpunkt an nach rechts dazu.

**Aufgabe 3b)**

$$x + y - 3 = 0 \tag{28}$$

$$2y = -9 - x \tag{29}$$

**Lösung:**

Umformen in die „übliche Form“ gibt:

$$y = -x + 3 \tag{30}$$

$$y = -0,5x - 4,5 \tag{31}$$

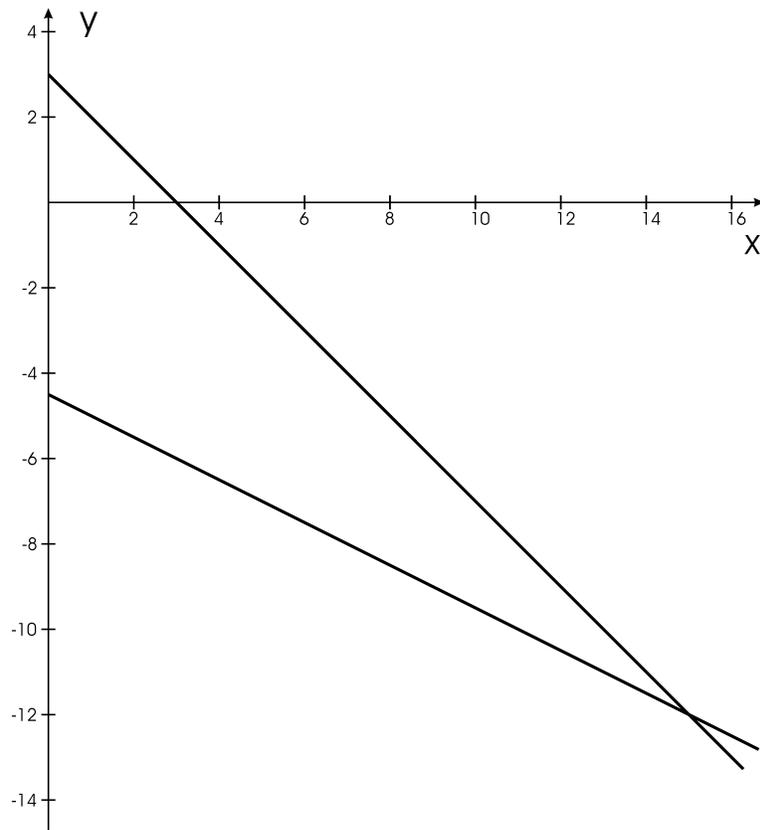


Abbildung 4: Der Schnittpunkt liegt bei  $(15, -12)$

Die Lösungsmenge ist  $L = \{(15, -12)\}$ .

Lösung bei MH (c) 2005