Kl. 11c KA Nr.6

Aufgabe 1: **a)** Eine zum Ursprung symmetrische Parabel 5. Ordnung hat im Ursprung die Tangente mit der Gleichung $y = 7x$ und in P(1/0) einen Wendepunkt. Wie lautet der Funktionsterm der Parabel?

b) Eine Parabel hat in P(-2/2) einen Wendepunkt mit Steigung 0. Von welchem Grad muss die Funktion mindestens sein? Ist die Parabel damit schon eindeutig bestimmt? (Nur Begründung, keine Rechnung)

Aufgabe 2: Ein Designer hat für ein neues Kunststoff-Liegestuhlmodell einen Entwurf vorgelegt. Er möchte nun den Umriss des Stuhles (siehe unten) möglichst genau mathematisch beschreiben und bestimmt zu diesem Zwecke die Koordinaten von 10 Punkten, die auf dem Stuhlrand liegen. Nun erinnert er sich dunkel an seine schulische Vergangenheit und lässt seinen Computer eine Funktion f bestimmen, deren Schaubild zwar die Punkte wie gewünscht enthält, die aber sonst so gar nicht seinen Vorstellungen entspricht.

a) Welchen Ansatz hat der Designer wohl für die Bestimmung der Funktion f gewält? Gib eine mathematische Begründung dafür an, warum dieser Ansatz hier nicht zum Ziel geführt hat!

b) Die Spline-Interpolation ist ein leistungsfähiges Hilfsmittel, solche Probleme zu umgehen. Zeichne in das gegebene Koordinatensystem das Schaubild einer Funktion ein, mit der der Designer wohl zufrieden wäre und erläutere (nicht rechnen!) anhand des Schaubild das Spline-Konzept!

Aufgabe 3: Zwischen den Punkten A(0/0) und B(8/2) soll eine Eisenbahntrasse gebaut werden.

Die Anschlüssstücke haben folgende Funktionsterme: $f(x)=\{ f_1(x)=-x^2$ für $x<0$; $f_2(x) = \ldots$ für $0<x<8$; $f_3(x)=-x + 10$ für $8<x\}$

Bestimme für das Mittelstück einen möglichen Funktionsterm $f_2(x)$!
Achte dabei auf knick- und ruckfreie Übergänge an den Nahtstellen!

Kl. 11c KA Nr. 6

Lösung der Aufgabe Nr. 1a:

Gesucht sind die Koeffizienten der Funktion:
$f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

1) Aus der Symmetrie in (0,0) $\Rightarrow$ $a_2 = a_4 = 0$
2) Aus der Tangente in (0,0) $\Rightarrow$ $a_1 = 7$
3) Aus WP in (1,0) $\Rightarrow$ $f''(1) = 0$ und $f(1) = 0$

Mit 3) ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(i) $f''(1) = 20a_5 + 6a_3 = 0$
(ii) $f(1) = a_5 + a_3 + 7 = 0$

$\Rightarrow a_5 = 3$ und $a_3 = -10$

Somit lautet die algebraische Funktion:

$$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 7x$$

===============

Lösung der Aufgabe Nr. 1b:

Behauptung: Eine Parabel deren Krümmung an wenigstens einer Stelle verschwindet, muss mindestens kubisch sein.

Widerspruchsbeweis: Sei g: $y(x) = ax^2 + bx + c$ eine quadratische Parabel deren Krümmung an wenigstens einer Stelle verschwindet, dann gibt es ein x_0 für das gilt: $y''(x_0)=0$
Mit $y''=2a_2 \Rightarrow 2a=0 \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow$ g ist eine Gerade!

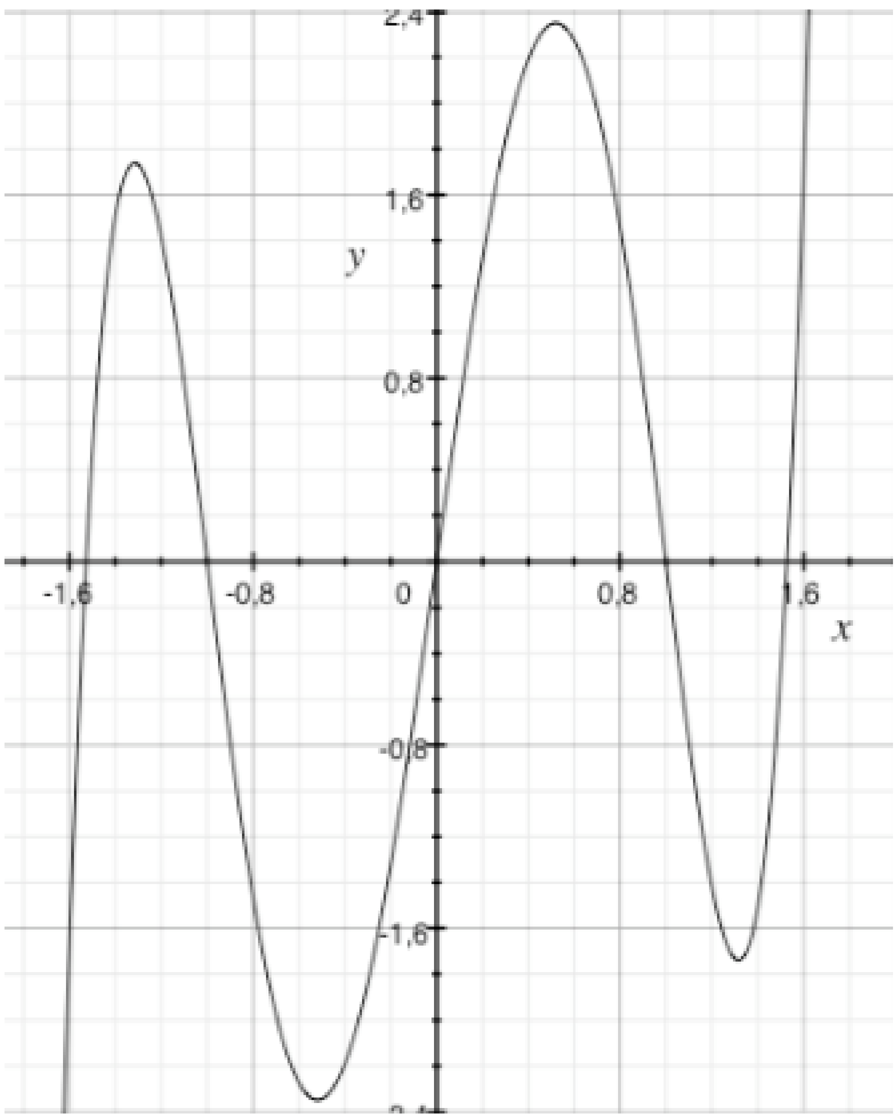
Eine Kubische Parabel wird bestimmt durch 4 Koeffizienten:
a_3, a_2, a_1, a_0.

Aus der Aufgabenstellung ergeben sich jedoch nur 3 Bedingungen:
(1) y(-2)=2   (2) y'(-2)=0   (3) y''(-2)=0

⇒ Die Funktion ist damit nicht eindeutig bestimmt!

======================================

<u>Graph von der Funktion: $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 7$</u>



<u>Bei Aufgabe 2 fehlt das Schaubild und ausserdem ist sie zu vage formuliert.</u>

Lösung der Aufgabe Nr. 3:

Zum ersten dürfen die Schienen keine "Sprünge" zwischen den Teilstrecken aufweisen:
$\Rightarrow$ (1) $f_2(0) = f_1(0) = 0$ und (2) $f_2(8) = f_3(8) = 2$

Zum zweiten dürfen die Schienen keine "Knicke" zwischen den Teilstrecken aufweisen:
$\Rightarrow$ (3) $f'_2(0) = f'_1(0) = 0$ und (4) $f'_2(8) = f'_3(8) = -1$

Zum dritten sollen die Übergänge "ruckfrei" gestaltet werden, d.h. die Krümmungen müssen gleich sein:
$\Rightarrow$ (5) $f''_2(0) = f''_1(0) = -2$ und (6) $f''_2(8) = f''_3(8) = 0$

Aus den 6 Bedingungen, Gleichungen (1) bis (6), an f_2 folgt, dass eine algebraische Funktion mit höchstens 6 Koeffizienten nötig ist! $\Rightarrow$ Parabel fünften Grades!

$$f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$f'(x) = 5a_5x^4 + 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$
$$f''(x) = 20a_5x^3 + 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$$

Aus (1) $\Rightarrow$ $\underline{a_0=0}$; aus (3) $\Rightarrow$ $\underline{a_1=0}$; aus (5) $\Rightarrow$ $\underline{a_2=-1}$;

aus (2) $\Rightarrow$ (7) $a_5 \cdot 8^5 + a_4 \cdot 8^4 + a_3 \cdot 8^3 - 8^2 = 2$;

aus (4) $\Rightarrow$ (8) $5a_5 \cdot 8^4 + 4a_4 \cdot 8^3 + 3a_3 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8 = -1$;

aus (6) $\Rightarrow$ (9) $20a_5 \cdot 8^3 + 12a_4 \cdot 8^2 + 6a_3 \cdot 8 - 2 = 0$;

aus (7), (8) und (9) $\Rightarrow$ a_3, a_4 und a_5 !

$$\Rightarrow \; f_2(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 - x^2 \quad \text{für } 0<x<8$$

==================================

W. Z. Z. W.