Klasse 10c

4. Klassenarbeit (Nachschrift) –
Exponential- und Logarithmusfunktionen
(Seite 1/1)

Name:

---

1. Wende die Logarithmengesetze an:

   a) $\log_b 4^5$ b) $\log_b \frac{7x^2y}{z^6}$ c) $\log_b a^{\sqrt{81}}$

   d) $\log_b (a+b)^2$

   e) Fasse zu einem Logarithmus zusammen:

   $\log_a(24x^2)+\log_a(0{,}5x)-\log_a(48x^3)-\log_a 0{,}25$

2. Gib die Lösungsmenge an:

   a) $3^{x+3}=27^{x-1}$

   b) $5^4 \cdot 5^x=100$

   c) $5\cdot 2^{x-1}+4\cdot 2^{x-1}=\frac{1}{16}$

3. Gib Funktionsgleichungen (mit Angabe der Bezugsgröße für die Zeiteinheit) an für den Fall, dass ein alter Wert von 300 Metern
   a) jährlich um 50 cm abnimmt.
   b) täglich um 10 Prozent zunimmt.
   c) sich alle 5 Jahre verzehnfacht
   d) sich alle 4 Monate fünftelt.

4. Frau Reichlich wiegt 80 kg und will wöchentlich 2% abnehmen. Frau Weniger möchte wöchentlich 2% zu ihren aktuell 50 kg zunehmen.
   Nach wie vielen Wochen zeigt die Waage für beide das gleiche Gewicht an? Wie viel wiegen sie dann?

5. a) Chrom 51 hat eine Halbwertszeit von 27,8 Tagen.
   Wie viel Prozent beträgt die tägliche Abnahme?

   b) Salmonellen vermehren sich unter bestimmten Bedingungen exponentiell. Anfangs befinden sich in einem Liter Fleischextrakt 50 Salmonellen, zwei Stunden später etwa 8300. Mit welchem Faktor wächst die Anzahl stündlich?

   c) Ein Bakterienrasen verdoppelt seine Fläche in einer Versuchsschale jede Stunde. Nach 6 Stunden ist die Fläche bedeckt. Welche Fläche bedeckte der Teppich nach 5 Stunden?

6. *Zusatzaufgabe:*
   Herr Milten zahlt zu Beginn eines jeden Jahres 2400 € auf ein Konto ein. Der Zinssatz beträgt gleich bleibend 6,25%. Nach wie vielen Jahren ist das Kapital auf mehr als 40 000 € angewachsen?
   Anmerkung: Es ist nur die Berechnungsvorschrift aufzustellen und der prinzipielle Weg zur Lösung zu beschreiben. Die genaue Tageszahl muss nicht bestimmt werden!

Lösung:

1.

a) $\log_b 4^5 = 5 * \log_b 4$

b) $\log_b \frac{7x^2y}{z^6} = \log_b 7x^2y - \log_b z^6$

c) $\log_b a^{\sqrt{81}} = \log_b a^9 = 9 * \log_b a$

d) $\log_b (a + b)^2 = 2 * \log_b (a + b)$

e) $\log_a (24x^2) + \log_a (0,5x) - \log_a (48x^3) - \log_a 0,25$
$= (\log_a (24x^2) + \log_a (0,5x)) - (\log_a (48x^3) + \log_a 0,25)$
$= \log_a (24x^2 * 0,5x) - \log_a (48x^3 * 0,25)$
$= \log_a (12x^3) - \log_a (12x^3)$
$= \log_a \left(\frac{12x^3}{12x^3}\right) = \log_a 1 = 0$

2.

a) $3^{x+3} = 27^{x-1}$ / log
$\Leftrightarrow (x + 3) \log 3 = (x - 1) \log 27$ /: log 3
$\Leftrightarrow x + 3 = (x - 1) \frac{\log 27}{\log 3}$
$\Leftrightarrow x + 3 = (x - 1) * 3$
$\Leftrightarrow x + 3 = 3x - 3$ /-3
$\Leftrightarrow x = 3x - 6$ /-3x
$\Leftrightarrow -2x = -6$ /: (-2)
$\Leftrightarrow x = 3$

b) $5^4 * 5^x = 100$ Potenzgesetz anwenden
$\Leftrightarrow 5^{4+x} = 100$ / log
$\Leftrightarrow (4 + x) \log 5 = \log 100$ /: log 5
$\Leftrightarrow 4 + x = \frac{\log 100}{\log 5}$
$\Leftrightarrow 4 + x = 2,8614$ /-4
$\Leftrightarrow x = - 1,1386$

oder

$5^4 * 5^x = 100$ / :5^4
$\Leftrightarrow 5^x = \frac{100}{5^4}$
$\Leftrightarrow 5^x = 0,16$ / log
$\Leftrightarrow x \log 5 = \log 0,16$ /: log 5
$\Leftrightarrow x = \frac{\log 0,16}{\log 5} \approx -1,1386$

c) $5 * 2^{x-1} + 4 * 2^{x-1} = \frac{1}{16}$ /ausklammern

$\Leftrightarrow 2^{x-1} * (5 + 4) = \frac{1}{16}$

$\Leftrightarrow 2^{x-1} * 9 = \frac{1}{16}$ /:9

$\Leftrightarrow 2^{x-1} = \frac{1}{144}$ / log

$\Leftrightarrow (x - 1) \log 2 = \log \frac{1}{144}$ /:log 2

$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{\log \frac{1}{144}}{\log 2}$

$\Leftrightarrow x - 1 = -7{,}1699$ /+ 1

$\Leftrightarrow x = -6{,}1699$

3.

a) 300 m = Anfangswert = f (0)
300m = 100%
3m = 1%
0,5m= $\frac{1}{6}$ % ≈ 0,17 % = 0,177 : 100 = 0,0017
n = Jahr

Formel lautet: $f(n) = f(0) * q^n$
Da es eine Abnahme ist, ist q = 1 – Abnahme

$f(n) = 300m * (1 - 0{,}0017)^n$
$\Leftrightarrow f(n) = 300m * 0{,}9983^n$

b) Da es eine Zunahme ist, ist q = 1 + Zunahme
n = 1 Tag
$f(n) = 300 * 1{,}1^n$

c) q = 10, da verzehnfacht
n = 1/5 * x, weil pro Jahr gerechnet wird
bei 5 Jahren muss x = 5 sein

$f(n) = 300 * 10^{1/5 * x}$

d) q = 1/5 = 0,2, da es sich fünftelt
n = ¼ * x, weil es pro Monat gerechnet wird
bei 4 Jahren muss x = 4 sein

$f(n) = 300 * 0{,}2^{1/4 * x}$

4. $f(n) = f(0) * q^n$
$f(0)$ ist hier das Anfangsgewicht
q ist das, was die Frauen abnehmen (1 – Abnahme) bzw. zunehmen (1 + Zunahme)
2% = 2: 100 = 0,02
n ist die Zeit, also hier Wochen

$f_{Reichlich}(n) = 80 * (1 - 0{,}02)^n$
$\Leftrightarrow f_{Reichlich}(n) = 80 * 0{,}98^n$

$f_{Weniger}(n) = 50 * (1 + 0{,}02)^n$
$\Leftrightarrow f_{Weniger}(n) = 50 * 1{,}02^n$

1. Frage: $f_{Reichlich}(n) = f_{Weniger}(n)$

$80 * 0{,}98^n = 50 * 1{,}02^n \qquad /: 50$

$\frac{80}{50} * 0{,}98^n = 1.02^n$

$1{,}6 * 0{,}98^n = 1{,}02^n \qquad /: 0{,}98^n$

$1{,}6 = \frac{1{,}02^n}{0{,}98^n}$

$1{,}6 = \left(\frac{1{,}02}{0{,}98}\right)^n \qquad / \log$

$\log 1{,}6 = n * \log 1{,}041 \qquad /: \log 1{,}041$

$n = \frac{\log 1{,}6}{\log 1{,}041} = 11{,}75$

2. Frage: Frau Reichlich wiegt dann genauso viel wie Frau Weniger:

$$f_{Weniger}(n) = 50 * 1{,}02^{11{,}75} \approx 63{,}1 \text{ kg}$$

5.
a) Formel: $f(n) = f(0) * q^n$

Halbwertszeit ist, wenn nur die Hälfte der Masse übrig ist
$f(n)$ = Masse nach n Tagen (in mg)
$n = 27{,}8$

$f(27{,}8) = \frac{1}{2} * f(0)$ und $f(27{,}8) = f(0) * q^{27{,}8}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} * f(0) = f(0) * q^{27{,}8} \qquad /: f(0)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = q^{27{,}8} \qquad / \sqrt[27{,}8]{\ }$

$\Leftrightarrow \sqrt[27{,}8]{0{,}5} = q \qquad$ / Potenzgesetz anwenden

$\Leftrightarrow 0{,}5^{1/27{,}8} = q$

$\Leftrightarrow 0{,}9754 \approx q$

$p = 1 - 0{,}9754 = 0{,}0246 = 2{,}46\%$ = tägliche Abnahme

b) Formel: $f(n) = f(0) * q^n$

$f(n) = 8300$
$f(0) = 50$
$n = 2$ (Stunden)

$8300 = 50 * q^2$ /: 50

$\Leftrightarrow \frac{8300}{50} = q^2$
$\Leftrightarrow 166 = q^2$ / √

$\Leftrightarrow \sqrt{166} = q$
$\Leftrightarrow 12{,}88 \approx q$

Die Salmonellen wachsen stündlich mit dem Faktor 12,88.

c) Formel: $f(n) = q^n$, weil kein Anfangswert gegeben ist.

$q = 2$, da der Rasen seine Fläche verdoppelt
$n = 6$ (Stunden)

$f(6) = 2^6 = 64$, dann ist die Fläche bedeckt

$f(5) = 2^5 = 32$

Nach 5 Stunden ist die Fläche zur Hälfte (32 : 64) bedeckt.

6. Zusatzaufgabe:
Formel: $K_n = K_0 * q^n$

K_0 = Anfangskapital = 2400 €
K_n = Endkapital = 40000 €
q = Zinsfaktor = 1 + 0,0625 = 1,0625, da es eine Zunahme ist und 6,25% = 6,25:100 = 0,0625
n = Jahre

$40000 = 2400 * 1{,}0625^n$ /: 2400

$\Leftrightarrow \frac{40000}{2400} = 1{,}0625^n$

$\Leftrightarrow 16\frac{2}{3} = 1{,}0625^n$ / log

$\Leftrightarrow \log 16\frac{2}{3} = n * \log 1{,}0625$ /: log 1,0625

$\Leftrightarrow \frac{\log 16{,}66}{\log 1{,}0625} = n$

$\Leftrightarrow 46{,}41 \approx n$

Nach mehr als 46,41 Jahren ist das Kapital auf 40000€ angewachsen.